[美]L. K. 蒂莫西　B. E. 博纳　著

状态空间分析导论

上　册

胡钦训　刘　颖　译

人　民　教　育　出　版　社

〔美〕L. K. 蒂莫西　B. E. 博纳　著

状态空间分析导论

下册

胡钦训　刘颖　译

高等教育出版社

状态空间分析导论

上 册

[美] L. K. 蒂莫西
B. E. 博 纳 著

胡钦训 刘 颖 译

人 民 教 育 出 版 社

状态空间分析导论

下　　册

[美] L. K. 蒂莫西
B. E. 博　纳　著
胡钦训　刘　颖　译

高等教育出版社

本书是根据 L. K. Timothy 与 B. E. Bona 所著的 *State Space Analysis: an introduction* 一书译出的。该书介绍了状态空间分析的初步知识，是从状态空间观点来阐明控制过程数学原理的一本较好的入门书。

译本分上、下两册出版。本书为上册，包括原书前五章及两个附录。主要内容为：系统的概念；有限维矢量空间，矩阵与线性算子，状态空间与状态方程；线性微分系统。

本书可作为应用数学、控制论及其他工科有关专业的师生的教学参考书，也可供应用数学工作者及有关工程技术人员参考。

状态空间分析导论

上　册

[美] L. K. 蒂莫西　B. E. 博　纳　著

胡钦训　刘　颖　译

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

开本850×1168 1/32　印张6.5　字数150,000

1981年12月第1版　1983年6月第1次印刷

印数 00,001—9,000

书号 13012·0705　定价 0.87 元

本书是根据 L. K. Timothy与 B. E. Bona 所著 State Space Analysis: an introduction 一书译出的。该书介绍了状态空间分析的初步知识，是从状态空间观点来阐明控制过程数学原理的一本较好的入门书。

译本分上、下两册出版。本书为下册，包括原书后四章及两个附录。主要内容为平衡点与稳定性，李雅普诺夫稳定性，离散时间系统，可控制性与可观测性。

本书可作为应用数学、控制论及其他工科有关专业师生的教学参考书，也可供应用数学工作者及有关工程技术人员参考。

状态空间分析导论

下　册

[美] L. K. 蒂莫西　B. E. 博纳 著

胡钦训　刘颖 译

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

朝阳区展望印刷厂印装

*

开本 850×1168　1/32　印张 6.125　字数 140,000

1985年11月第1版　1986年8月第1次印刷

印数 00,001—2,350

书号 13010·01095　定价 1.40 元

译者的话

本书是从状态空间观点来阐明控制过程数学原理的一本较好的入门书。它的特点是精辟地用数学语言表达了状态空间理论的基本要点。此书在第三、四章提供了必要的数学基础理论，因此对于工程技术人员，读起来是方便的。它所提供的实际例题都是十分简单的，因而又适用于数学工作者。所以此书不但是一本较好的教材，而且对于对状态空间控制理论有兴趣的应用数学工作者与工程技术人员来说也是易读的参考书。因此我们认为有必要把此书介绍给国内广大读者。

1979年我们曾把此书作为常微分方程与控制专业研究生试用教材，教学双方都认为这是一本合适的教学用书。

对原书中印刷上的错误我们都尽力加以改正，有些定理漏了的条件都补上了。倘因此而引起错误，概由译者负责。

译者1981年国庆节于北京工业学院

序　言

本书的目的是介绍状态空间分析的初步知识。内容的一般论述从工程师观点看来也许是稍微严格些，可也不是从数学家的观点来处理的。在本书的写作上，我们试图用自然而又精确的数学语言表达状态空间理论的基本要点，也试图保持一定程度的数学严密性，但不是为了严密而严密。从数学上说，书中内容大约介于工程师的传统"应用"数学与数学家的"纯粹"数学之间。

我们认为关于这个内容的流行书籍不是写给"理论家"的（严格的数学）就是写给工程师的(数学手册)。因此我们力求使这本书能把理论家和实际工作者之间的空白沟通起来而不偏于那一方面。本书是为大学三、四年级和第一年研究生写的。

本书内容并不专对工程的某种特殊领域。我们着重于把数学概念与有关的动态系统相连系，不论后者在性质上是电学的、机械的还是化学的；从状态空间的观点研究动态系统的微分方程，而不管其起源。此外，采用的工程学科的例题都十分简单，我们不去阐述例如自动驾驶装置或原子核反应堆的控制问题等传统例子，这些复杂而深奥的例子使读者加重负担而且可能分散对数学概念的注意力。大量的练习题列在每章的后面，这些练习题从内容和难度上都各不相同。

本书的内容主要是讨论状态空间概念，并且在这方面几乎是自封的。换言之，我们认为这本教科书可以容易地作为系统理论的初级课本。虽然我们假定读者已经学过微分方程课程甚至一些拉普拉斯变换理论，但是并不要求这些科目中的某些深的知识。本书首先讨论的是和状态空间分析方法有关的概念与数学。例如第二、三章中介绍了应用于状态空间分析的基础数学。在这两章

中对线性空间与矩阵理论作了扼要而广泛的论述．在第二章“有限维矢量空间”中借助于几何的直观想法建立了线性空间的数学，对于状态空间分析这是基本知识．我们认为对线性空间的严密性必须预先有牢固的基础。

必需的数学的绝大部分已包含在第二、三章中．如果要学习这两章的整个内容大约需要一个季度。可是我们要指出，这两章的内容并非在以后学习中都是必需的。对于全书各章也是一样的。这就是说，有些小节可以越过而不失连贯性。有些内容在以后的学习中是必要的，读者也可以把这些内容的学习推迟到需要的时候。例如第二章的§2.7与§2.10可以越过而不失连贯性。第三章中读者可推迟或越过§3.6，§3.7及§3.13。

一般说来，这本书的广泛的内容需要不少于两个季度的学习如果教师认为第二、三章的内容是学习状态空间分析必须预先具备的，可以把第四到九章的绝大部分内容安排在一个季度内。

参考书以著者字母为序列在每章之后，在书中引用参考书处以方括号列出著者姓名及发表年代，例如[Murdock，1957]．方括号是提醒读者注意，这里是表示参考文献，标出年代是避免含混．

我们感谢在Autonetics，洛杉矶加州大学分部和犹他大学的同事和学生们对本书的准备工作提出的建议和批评。尽管本书还有许多缺点，我们认为这种友好的意见已使本书成为一本较为易读的书。

L.K.蒂莫西
B.E.博　纳

目　录

目　录

第一章 预备知识

1.1. 引言

本章首先打算介绍给读者的是有关系统的分析与设计的直观概念与想法。我们给出系统概念的有点叙述性的描述并且列出要研究的系统的类型。

1.2. 系统概念

系统这个术语是全书经常使用的。我们不想给出系统的一个明确且精密的定义。相反，下面这个有点明显且直观的定义对于我们的需要来说就是足够的了：一个物理系统 S 定义为诸物理元素或对象之间的一个关系，而一个抽象系统 S 定义为一个数学过程。这个定义是有点含糊的，但是对我们的目标来说是适当的，因为系统的概念对读者的掌握来说首先是一个直观的想法。下面的例子说明物理系统的概念。

例 1.2-1 考察图 1.2-1 所示的系统 S_1 与 S_2。系统 S_1 在性质上是力学的，对应的元素是原动力、弹簧、质量及缓冲器。系统 S_2 在性质上是电学的，对应的元件是电源、电阻、电容及电感。描述这些元件互相关联及互相作用的数学模型分别为

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+r\frac{dy}{dt}+ky=f$$

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int idt=v$$

其中 m、r、k 及 f 对应于 S_1 的质量、缓冲器的摩擦系数、弹性常数及 S_1 的原动力；而 L, R, C 及 v 对应于 S_2 的电感、电阻、电容及 S_2 的电源。记号 y、及 i 对应于位移、电流及时间。

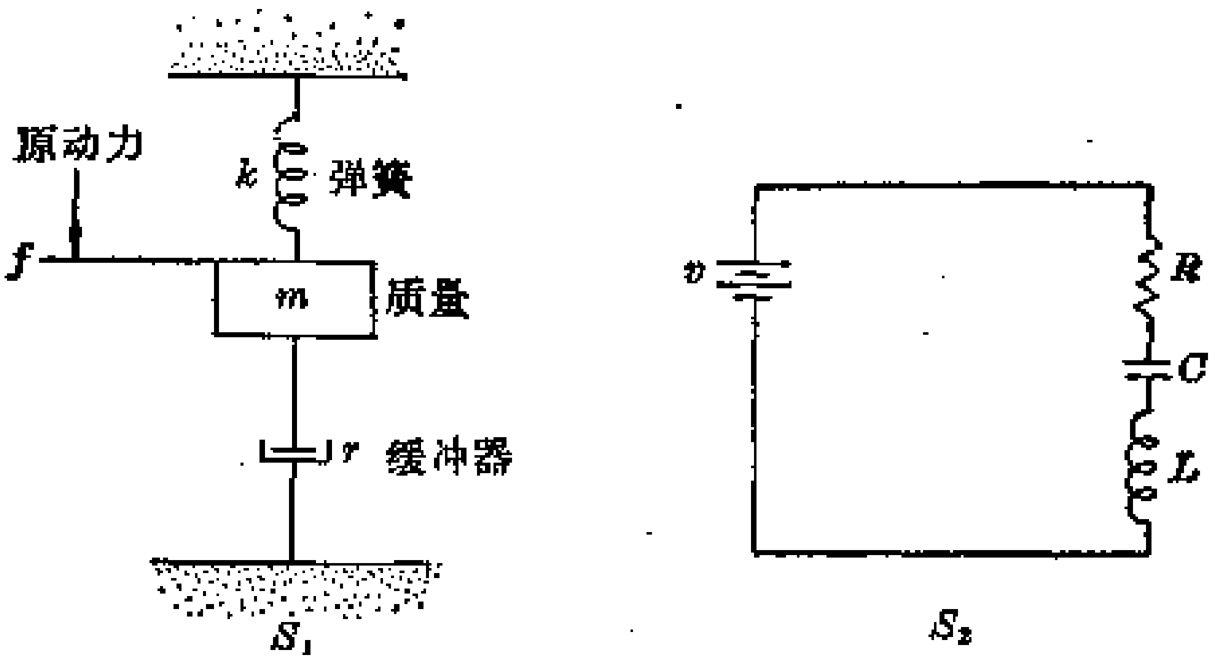


图 1.2-1 两个物理系统的例子，S_1 与 S_2.

系统的概念是相当广泛的，它并不限于如上所述的简单力学及电学装置；这个概念同样可用于更深奥复杂的系统，例如汽车与导弹，也可用于其它领域，例如生物学、社会学、商业甚至于农业，在农业中就遇到灌溉系统．我们所采用的观点一般来说是数学的．我们不打算列出各种系统的众多的数学模型，而是把这个方面的问题留给各种专家们．然而在例 8.2-1 中我们描述了一个抽象系统并建立了适当的数学模型．读者无疑会遇到或关心这个系统，因为它在商业界是经常会出现的．

本书几乎完全专门致力于动态系统．我们仍不会给出动态系统一个确切的并公理化的定义[Kalman,1963]．对我们的目标来说，动态系统是一个系统，其输入与输出是用微分(或差分)方程组关联起来的．

让我们把上述的动态系统的定义和原因与结果的观点即因果律联系起来．考察宏观质点系在一组力的作用下的运动，若现在的位置和动量以及现在与未来的力均为已知时，则根据牛顿力学，质点系的未来的运动就完全确定了．未来的力对现在是没有影响的（非预期系统），且系统如何达到它现在的状态也是不重要的．

依据定义，对质点系的输入是力．系统的输出可定义为能直接观测的任何变量(位置或动量)．系统的运动自然是由牛顿力学所导出的一组微分方程所描述．质点的位置和动量完全确定了系统的运动，它们描述着系统的状态．直观地说，系统的状态是关于系统的过去的现在信息的最小量，它能使我们预料过去对将来的影响．用于描述系统状态的变量称为状态变量．

状态及状态变量的概念在本书中是要充分地阐述的．用这些概念来分析系统需要足够的有限维矢量空间或抽象线性代数以及有关的矩阵论的数学知识．这些内容将在第二章及第三章中介绍之．

现在介绍控制系统的概念．在控制系统工程师的口语中，一个控制系统被认为包含两个基本部分，即被控系统(也称为装置)和控制器，如图 1.2-2 所示．由被控系统(装置)与控制器所构成的"组合系统"通常称之为控制系统．

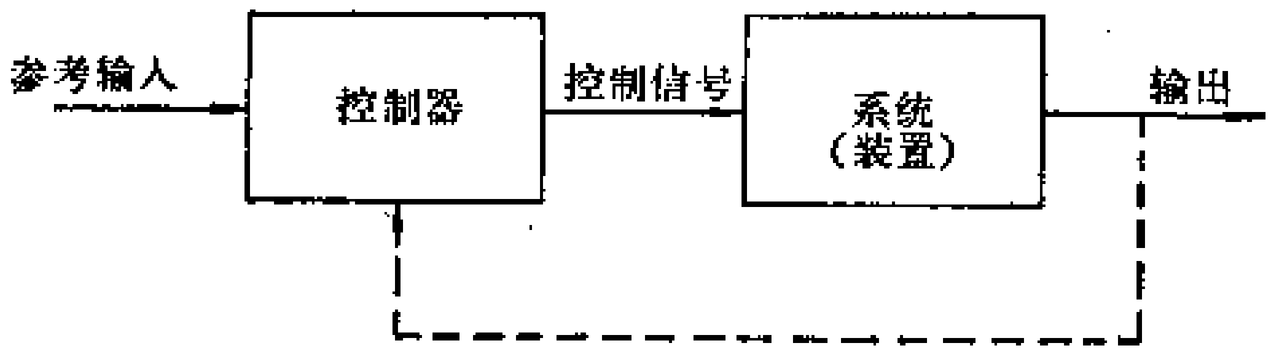


图 1.2-2　控制系统的两个部分．

一般区分控制系统为开环或闭环．闭环系统也常称为反馈系统或反馈控制系统．在开环系统中，控制器命令装置按照参考输入"动作"．如图 1.2-2 的虚反馈线在开环系统中是不存在的．换言之，系统的输出不能以任何直接方式用以控制装置．

今考察闭环系统．如图 1.2-2 所指出的参考指标与系统的输出均送入控制器．控制器使系统的输出与参考指标相比较，并强迫或命令系统按照这两种信号之差(在某种意义下) 为最小来"动作"．从控制器出来的信号(称为指令或控制) 依赖于系统 (装置)

的输出信号，因此"组合系统"称为反馈系统.

反馈系统的概念不仅可用于机器上，也可用于各种被控动态过程。作为一个例子，考察保险公司的业务。管理处在确定保险人保险率及股东红利的意义上可认为是控制器。在这时参考指标是最大红利和最小保险率。反馈来源于保险人和股东。管理处以利润和公司关于保险率的竞争形势为依据评价反馈信息，必要时可以调整保险率并发出新的指示。

人和动物的器官功能是反馈过程的另外一些例子。例如，就人的眼睛来说，虹膜张开能使光线经过晶状体映入视网膜上。当视网膜上光线太强了，这个信号反馈到虹膜，它就调节张开的程度以接收适量的光线.

谈到电动机器，传统地说，人就是控制器。例如在车床的操纵上，当人去调整一些变量，如车床的速率以及切削刀具的角度与深度时，人就起到了控制器的作用.（这个例子是开环系统或者闭环系统的说明.）今天，更复杂的机器已被设计出来，它们承担控制器的作用。一个数字计算机就能按程序发出命令使车床调整速率和使切削工具变动角度与深度。在车床上由计算机把毛坯的形状与模型（参考物）相比较，当形状与模型一致时，计算机命令系统进行下一步操作.

如前面例子中所指出的，反馈原理是任一个动态过程成功控制的基础。我们生活在一个有活力的世界上；人要出生，成长与死亡；我们要筹办中学和大学；要组织社团和政党；要建造桥梁、公路与机器。这一切活动的成功的操作依赖于反馈原理。人作为控制器与被控系统之间信息的流通在这一切活动中是能被认识的。我们看到的是人根据系统相对于某个理想来说不完全的性能不断调整此系统的控制.

适用于机器及电子设备上的各种不同观点的反馈原理的形式化，发表在英国的马克斯韦尔[1868]，美国的米诺尔斯基[1922]，

苏联的马尔金[1930]及美国的贝尔斯特[1930]的著作中，首先研

们的目的。

在本书中，分析与设计的一般问题细分起来如图 1.2-4 所列。我们考察与装置分析有关的三个基本论题：

1. 数学模型. 确定系统的一个适当的数学描述(模型)。

2. 可控制性. 确定是否可能用一个命令或控制信号来影响装置的所有状态变量。

3. 可观测性. 从易测定的输出，假如可能的话，要计算装置的所有状态变量。

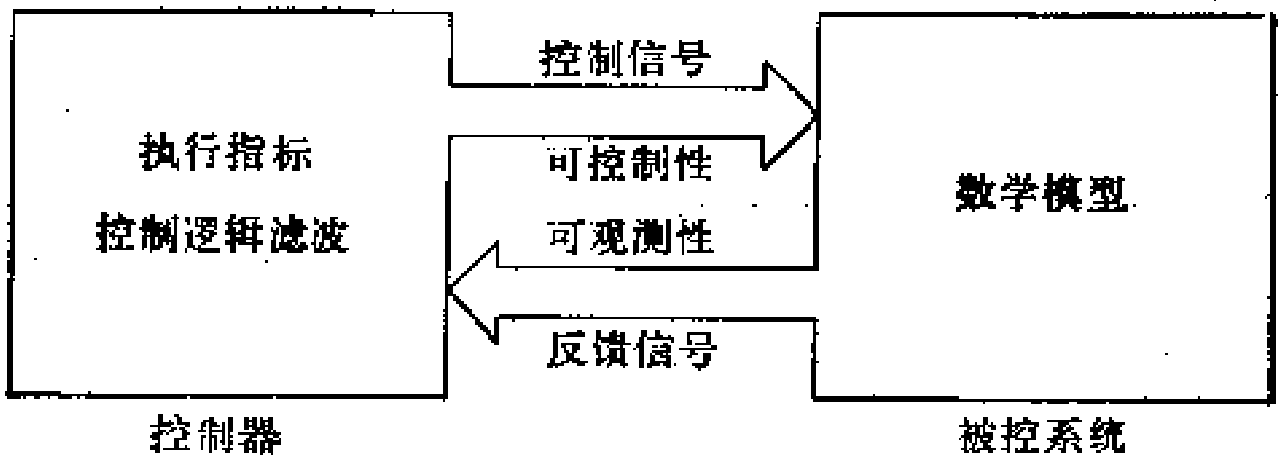


图 1.2-4 一个一般的控制系统.

控制器的设计与分析通常包含下列项目的考察：

4. 执行指标. 要求执行的指标必须定好. 这样的指标的例子如最少时间、最短距离、最小能量或这些指标的组合。

5. 容许控制信号. 规格或要求必须定好，用来鉴定容许控制信号。

6. 控制逻辑. 4,5 两项定好以后，综合一个最优控制或接近最优控制. 这就是一个最好的或接近最好的控制可从容许控制中挑选出来使得系统从某个初态"运动"到某个所要求的终态，而执行指标在某种意义上是被满足的. 图 1.2-5 说明几条可能的途径，沿着它们控制器可命令装置来运动。

7. 滤波. 通常，控制器制定依赖于系统的状态的控制信号，因而包含在控制器中是一个由被观测的输出计算、估计或确定系

统的状态的装置.

8. 稳定性. 闭环系统的稳定性必须确定. 稳定性的考察当然影响到控制器的设计。



图 1.2-5 系统从初态运动到终态的可能途径.

本书的目的只处理控制系统问题的分析方面. 从 4 到 7 所指的设计方面以及数学模型的论题都不加考虑. 关于稳定性、可控制性及可观测性诸分析论题在第七章和第九章中将从介绍性课程的观点来处理.

1.3. 结束语

在这一章我们介绍了系统概念的一些直观思想. 我们承认这个定义是含糊的，但是觉得在系统理论的介绍性课程中是够用的. 在以后各章将涉及在状态空间中分析系统的性态或运动的问题. 我们将不详细讨论适当的系统模型的确定问题，而宁可留给各自的专家们去列出他的系统的数学模型.

控制系统的分析与设计本身就是一个反馈过程. 分析与设计从某些合适的，但或许是近似的和不适当的模型开始，作了适当的分析与鉴定之后，这个模型可得到改进. 于是分析导向更进一步的设计与分析.

提出并阐明用于设计与评价一个广泛控制系统类的现代解析工具是本书的主要目的.

参考书目

Bellman, R. E.: *Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957.

Kalman, R. E.: Mathematical Description of Linear Dynamical Systems, *SIAM J. Controls*, 1963.

Kalman, R. E. and J. E. Bertram: General Synthesis Procedure for Computer Control of Single and Multi-loop Linear Systems, *Trans.*

AIEE, vol. 77, pt. II, pp. 602-609, 1958.
Malkin, I. G.: The Problem of Existence of Lyapunoff's Functions, *Izv. Kazansk. Phy. Math. Soc.*, vol. 4, 1929-1930, and vol. 5, 1931.
Mason, S. J.: Feedback Theory: Some Properties of Signal Flow Graphs, *Proc. IRE*, vol. 41, no. 9, pp. 1144-1156, September, 1953.
Mason, S. J.: Feedback Theory: Further Properties of Signal Flow Graphs, *Proc. IRE*, vol. 44, no. 7, pp. 920-926, July, 1956.
Maxwell, J. C.: On Governors, *Proc. Roy. Soc. London*, vol. 16, pp. 270-283, 1868.
Minorsky, N.: Directional Stability and Automatically Steered Bodies, *J. Am. Soc. Naval Engrs.*, vol. 34, p. 280, 1922.
Nyquist, H.: Regeneration Theory, *Bell System Tech. J.*, vol. 11, pp. 126-147, January, 1932.
Pontryagin, L. S., et al.: On the Theory of Optimal Processes, *Dokl. Akad. Nauk S. S. S. R.*, vol. 110, no. 1, pp. 7-10, 1956.

第二章　有限维矢量空间

2.1. 引言

本书极大部分致力于线性系统的研究．其理由是双重的：分析技术得到了充分的发展和了解；且许多物理系统的动态用线性近似来描述就满足要求了．因此线性系统及其有关的分析技术的研究对于状态空间技术的初步研究提供一个方便的起点，并且对进一步的研究建立了必要条件．第二章和第三章介绍数学的基本原理，它用于描述和分析多输入多输出复杂的线性系统．

无疑学生对"矢量"这个词是熟悉的．与它有关的几何观念是有向线段——一个矢量有大小与方向．用自由矢量描述的物理量包括力、速度和加速度．一般来说，这些矢量都设想在二维空间或三维空间中，如在解析几何和力学中一样．

在下列各节中我们推广矢量的定义并介绍矢量空间的概念．我们从像与力这样的自由矢量相联系的基本的几何观念出发来创立理论，并且为了易于一般化而定义矢量的代数表达式．这个方法是为了从二维与三维问题顺利过渡到 n 维问题做好准备．从直观的或几何的方法建立了基本概念之后，我们把为更一般的矢量与矢量空间概念所共有的抽象定义与运算阐述为一组公理．在我们的课程中将看到矢量的各种形式与自由矢量的物理概念无关．虽然如此，在这种情况下我们并不完全抛弃几何的讨论，因为直观能帮助我们去说明与解释许多结果．

2.2. 标量与数域

下面我们提到标量、矢量与数域．对我们的目的来说，实数的直观知识就足够了，但是也假定学生熟悉形如 $a+ib$ 的复数，其中

a 与 b 为实数，且 $i^2=-1$. 我们将认为实数与复数都是标量. 当有必要区分实标量与复标量时，我们将明确说明标量的类别.

数域定义为[Halmos,1958]在加、减、乘与除四种初等运算下是封闭的数的集合. 若对于数集的任何两个数 a 与 $b\neq0$, 数 a/b 也是此集合中的一个数，就说数集在除法下是封闭的. 集合在加法、减法、乘法下是封闭的可相似地定义. 正整数集合在加法下是封闭的，但在减法下就不是. 全体实数的集合和全体复数的集合都是数域的例子.

2.3. 线性空间的基本概念

我们现在引入并说明线性空间的一般概念（由于在今后的讨论中将成为十分明显的几何理由，我们经常把线性空间称为矢量空间，而其元素称为矢量）. 线性空间定义为对象或元素的集合，它在加法与标量乘法下是封闭的. 我们称这个集合（线性空间）的对象、元素或成员为矢量. 线性空间或矢量空间的正式定义在 2.5 节中给出. 下面的例子对一个熟悉的矢量空间给出了物理解释.

例 2.3-1 考察两个力 $\mathbf{f}_1$ 与 $\mathbf{f}_2$，其几何表示如图 2.3-1 所示. 我们把 xy 平面上所有的力定义为一个集合. 力 $\mathbf{f}_1$ 与 $\mathbf{f}_2$ 在平面上，因此是这个集合的元素，这个集合在加法下显然是封闭的，因为此集合（xy 平面）中任何两个力的和也是这个集合中的一个力. 例如在图 2.3-1 中和或合力 $\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_2$ 是 xy 平面上的一个力，因此由定义也是这个集合中的一个元素. 其次，若 $\mathbf{f}_1$ 或 $\mathbf{f}_2$ 用实数 α 乘之，于是新力 $\alpha\mathbf{f}_1$ 与 $\alpha\mathbf{f}_2$ 也是平面上的力，因此也是此集合的

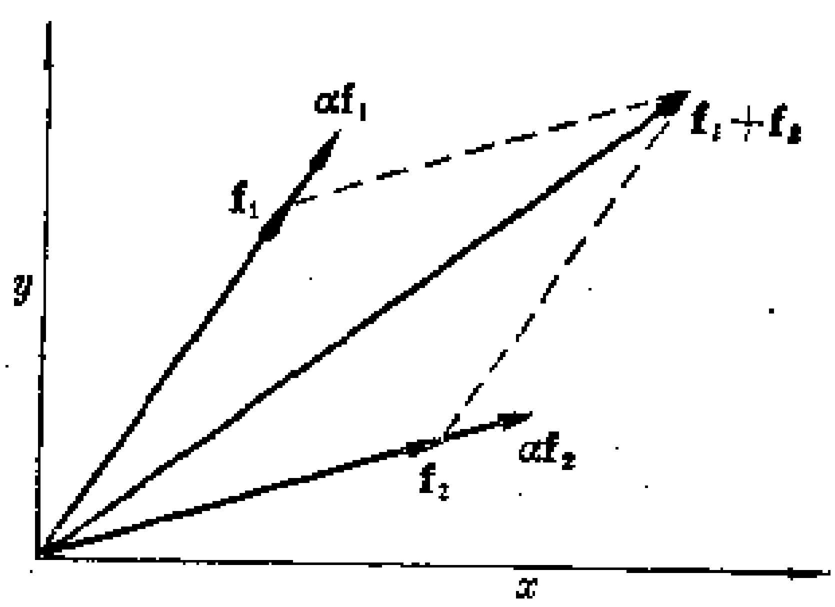


图 2.3-1 xy 平面上力的集合.

元素.

在例 2.3-1 中的力的集合在加法与标量乘法下是封闭的，因此它是一个线性空间或矢量空间. 由于力是实的且 α 也是实的，此空间可更恰当地称为实矢量空间或实线性空间或实域上的矢量空间.

2.4. n 维空间

为了扩充这些概念到 n 维空间，我们从定义矢量的“代数”表示法或点表示法着手，这相当于几何表示法. 图 2.4-1 表示一个矢量 **v**，其始点在坐标原点而其终点由有序数组 v_1, v_2, v_3 给出，此数值由所示的坐标系测定.

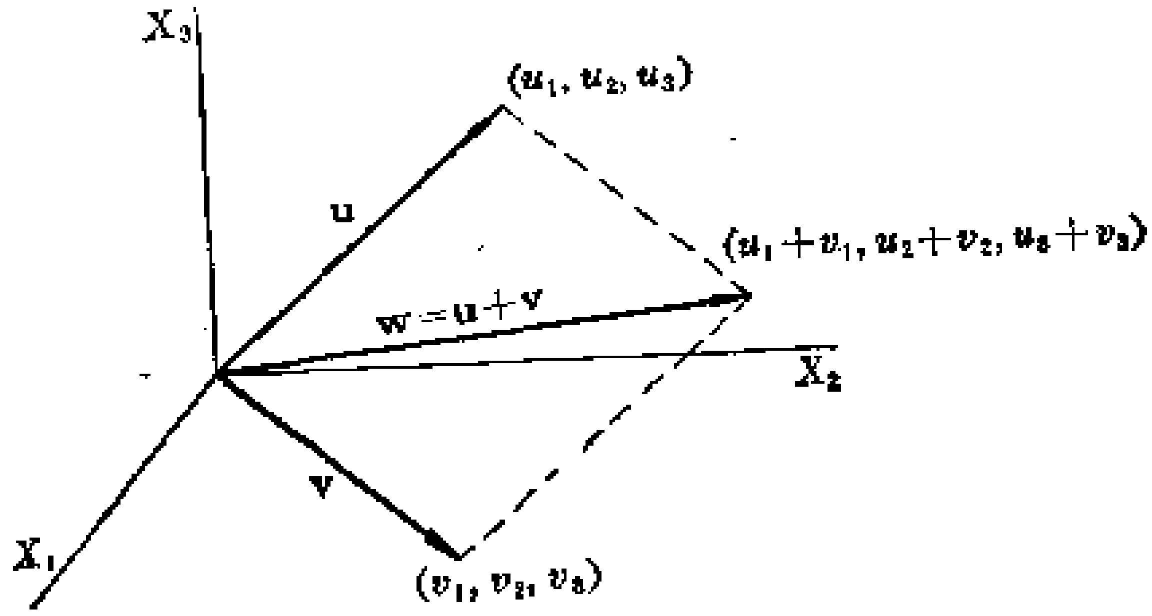


图 2.4-1 三维矢量的加法.

矢量 **v** 由三个数 v_1, v_2, v_3 唯一确定，此数组称为矢量关于坐标轴 X_1, X_2, X_3 的坐标[Murdoch, 1957]. 若坐标轴 X_1, X_2, X_3 被改变，这三个数也要改变. 对 **v** 的代数或点表示法可写为

$$\mathbf{v}=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

不用说，其中坐标 v_1, v_2, v_3 是关于坐标轴 X_1, X_2 及 X_3 给出的. 由于它的结构，由(1)式所定的矢量称为列矢量.

今考察以 u_1, u_2, u_3 为坐标的第二个矢量 $\mathbf{u}$. 它们的和 $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ 是按照平行四边形法则构成的矢量 $\mathbf{w}$. 如图 2.4-1 所示，矢量 $\mathbf{w}$ 的坐标是 $u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3$. 这就是说矢量 $\mathbf{w}$ 的代数表示式为

$$\mathbf{w}=\begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

(2)式的几何证明留给读者作为练习。

关于矢量的一切运算及法则在这里不再列出. 我们更关心的是把矢量的代数观点推广到 n 维去. 这无疑是没有困难的. 例如考虑形如

$$\mathbf{v}=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

的矢量. (3)式显然是(1)式的推广. 这 n 个有序数 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 是矢量 $\mathbf{v}$ 关于某一组确定的坐标系 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的坐标. 因而(3)式定义了矢量关于坐标系 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的坐标。

为了现在的目的，我们设想坐标 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 是标量域中的数。特别是现在关心的是实域。这时，矢量 $\mathbf{v}$ 称为实矢量或实域上的矢量. 在本书中的大部分，我们所关心的是由(3)式所定义的 n 维矢量. n 个有序数(坐标矢量)的矢量空间，若此空间为实的称为 R^n，若此空间为复的称为 C^n [Halmos, 1958]. 今后将会遇到其它形式的矢量和矢量空间并且给出 R 与 C 的更一般的定义。

现在我们来证明 n 有序数或 n 维集合在加法与标量乘法下是封闭的. 亦即 n 个有序实数 (n 维) 集合是一个线性空间 (称为 R^n).

设 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 是任两个实 n 维矢量，其坐标各为 x_i 与 y_i.

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\qquad \mathbf{y}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}\tag{4}$$

如图 2.4-1 所示与自由矢量的加法相一致，和 $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ 定义为矢量

$$\mathbf{z}=\mathbf{x}+\mathbf{y}=\begin{bmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\\vdots\\x_n+y_n\end{bmatrix}\tag{5}$$

因为和 $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{z}$ 也是 R^n 中的一个实矢量，故这个集合在加法下是封闭的。若 k 为一实数，矢量 $k\mathbf{x}$ 称为 $\mathbf{x}$ 的数乘，定义为

$$k\mathbf{x}=\begin{bmatrix}kx_1\\kx_2\\\vdots\\kx_n\end{bmatrix}\tag{6}$$

在 (6) 式中的矢量是 R^n 中的实矢量，因此这个集合在数乘下封闭。

我们观察到任一矢量空间必有零矢量(称为原点)。在 R^n 中零矢量为

$$\mathbf{0}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\tag{7}$$

只要注意到若 $\mathbf{x}$ 在此空间中，则

$$\mathbf{z}=\mathbf{x}+k\mathbf{x}\tag{8}$$

也如此，就能证明每一个矢量空间含有零矢量。若令 $k=-1$，则有 $\mathbf{z}=\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{x}-\mathbf{x}=\mathbf{0}$。

对于(4)式中的矢量 x，有

$$\mathbf{x}-\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1-x_1 \\ x_2-x_2 \\ \vdots \\ x_n-x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

顺便可以得出一个矢量空间在减法下是封闭的，例如 x 与 y 都是空间中的矢量，于是 −y 也是，其和 x + (−y) 也是此空间中的矢量．但是

$$\mathbf{x}+(-\mathbf{y})=\mathbf{x}-\mathbf{y}$$

因此这个空间在减法下是封闭的．在给出矢量空间的正式定义之前，先举一个纯代数的例子．

例 2.4-1 考察齐次标量方程组

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0 \end{aligned} \tag{9}$$

此方程组有无穷多组解，包括平凡解 $x_1=x_2=x_3=0$ 在内。除平凡解以外，设

$$c_1, c_2, c_3 \quad 及 \quad d_1, d_2, d_3 \tag{10}$$

为此方程组的任意两组解。我们将称这些有序数组为解矢量。与(3)式相一致，可将上述解矢量列成

$$\mathbf{0}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}=\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

为要证明此方程组(9)的解集合是一矢量空间，需要证明解集合在加法与数乘下是封闭的。设 α 与 β 为标量，显然 $\alpha\mathbf{c}$ 或 $\beta\mathbf{d}$ 是解。例如考察 $\alpha\mathbf{c}$：

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha c_1+a_{12}\alpha c_2+a_{13}\alpha c_3=0 \\ a_{21}\alpha c_1+a_{22}\alpha c_2+a_{23}\alpha c_3=0 \end{aligned} \tag{11}$$

由于从方程组(11)可约去 α，故 $\alpha\mathbf{c}$ 为一个解，且此集合在标量乘法下是封闭的。容易看出和 $\alpha\mathbf{c}+\beta\mathbf{d}$ 也是一个解。所以解的集合在加法下也是封闭的，于是一切解的集合，即(10)中的有序数组成为一个矢量空间。方程组 (9) 称为此空间的方程组。因为方程组 (9) 的解的集合为一个线性空间，此方程组称为线性方程组。(也可参看习题 2.9.)

2.5. 矢量空间的抽象定义

数域F上的矢量空间或线性空间由一个集合V组成，V中尚未定义的元素或对象称为矢量。定义了V中两个元素的加法及V中一个元素与一数的乘法这两种运算。这些运算满足下列法则[Shilov,1961]。

法则 1 设$\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z},\cdots$是一个集合(线性空间$V$)的元素(矢量)。加法法则允许我们从两个元素设为$\mathbf{x}$与$\mathbf{y}$作出第三个元素$\mathbf{z}$。用符号表示,对$V$中任一对$\mathbf{x}$与$\mathbf{y}$可记其和为

$$\mathbf{z}=\mathbf{x}+\mathbf{y}$$

$\mathbf{z}$也在V中。

法则 2 设α是域F中的一个标量，数乘法则允许我们从V中每一个$\mathbf{x}$作出另一个也在V中的矢量$\mathbf{z}=\alpha\mathbf{x}$。

法则 3 对V中的任何$\mathbf{x},\mathbf{y}$与$\mathbf{z}$及F中的α与β，加法及数乘运算构成下列的法则：

矢量加法

(i) $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$ (交换律)。

(ii) $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$ (结合律)。

(iii) 在V中存在$\mathbf{0}$使得$\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}$。

(iv) 对每一个$\mathbf{x}$,存在唯一的$\mathbf{y}$使得$\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{0}$。

数乘

(v) 存在元素1,使得$1\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}$。

(vi) $\alpha(\beta\mathbf{x})=(\alpha\beta)\mathbf{x}$ (结合律)。

加法与数乘

(vii) $(\alpha+\beta)\mathbf{x}=\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x}$ (分配律)。

(viii) $\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\alpha\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}$ (分配律)。

学生应当验证在例 2.3-1 及 2.4-1 所定义的矢量空间满足上述假定。下面给出矢量空间的另一个例子，在这个例子中的矢量

满足上述假设，但不是如为矢量一样容易地解释为物理量。

例 2.5-1 线性齐次微分方程

$$\frac{d^n y}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)y=0$$

的所有实解的集合是实域上的矢量空间。设 y_1 与 y_2 是任何二个实解，用直接代入容易验证对任何标量 α 与 β，αy_1，βy_2 及 $\alpha y_1+\beta y_2$ 也都是解。微分方程称为是矢量空间的方程，而二重无穷多个解 $\alpha y_1+\beta y_2$ 称为解矢量。

2.6. 线性相关、基底与维数

设 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_n$ 是线性空间 V 的矢量，并设 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是 F 的标量。矢量

$$\mathbf{y}=\sum_{i=1}^{n}c_i\mathbf{u}_i \tag{1}$$

称为矢量 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_n$ 的线性组合。由所给矢量组的一切线性组合所成的矢量空间称为由矢量组张成或生成的空间。

要证明一个给定的矢量组的一切线性组合的集合形成矢量空间，首先要证明此集合在加法下是封闭的。考察矢量组 $\mathbf{u}_1$，$\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_n$ 的任意两个线性组合，即设

$$\mathbf{y}_1=\sum_{i=1}^{n}a_i\mathbf{u}_i$$

$$\mathbf{y}_2=\sum_{i=1}^{n}b_i\mathbf{u}_i$$

于是

$$\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2=\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\mathbf{u}_i=\sum_{i=1}^{n}d_i\mathbf{u}_i$$

这就证明了 $\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2$ 也是矢量 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_n$ 的一个线性组合。所以线性组合的集合在加法下是封闭的。其次证明这个集合在数乘下是封闭的，只要观察对任一标量 λ，有

$$\lambda \mathbf{y}=\lambda \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{u}_i=\sum_{i=1}^{n}(\lambda c_i)\mathbf{u}_i$$

矢量组 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_n$ 的一切线性组合的集合常常称为线性流形。换一种说法，所谓由矢量组 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots \mathbf{u}_n$ 张成的线性流形，我们指的就是如(1)式的一切线性组合的集合。我们说矢量组张成线性流形[Shilov, 1961]，或者说线性流形由矢量组 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_n$ 所张成。在例 2.3-1 中，两个力矢量 $\mathbf{f}_1$ 与 $\mathbf{f}_2$ 张成线性流形 $\alpha\mathbf{f}_1+\beta\mathbf{f}_2$。换言之，形如 $\alpha\mathbf{f}_1+\beta\mathbf{f}_2$ 的一切线性组合的集合张成一个线性流形。在例 2.3-1 中线性流形是由二维 xy 平面所定义的线性空间。

在(1)式中如果所有的常量 $c_1,c_2\cdots,c_n$ 都是零，则此矢量显然是零矢量。另一方面，虽然所有的 c_i 不全为零，$\mathbf{y}$ 也可以是零矢量。在后一种情况，矢量组 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_n$ 称为是线性相关的。换一种说法，若线性关系

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{u}_i=0 \tag{2}$$

只当所有的 $c_i=0$ 时才成立，这个关系称为是平凡的。根据(2)式列出下面的定义。

定义 2.6-1 满足非平凡关系(即非一切 $c_i=0$)的任一矢量组称为是线性相关的。只满足平凡关系的一组矢量称为是线性独立的。

若一组矢量是线性相关的，则此矢量组中一个矢量可表示为其余矢量的线性组合。由线性相关性得出不是一切 c_i 都等于零，不失一般性，可假设 $c_1\neq0$，因此从(2)式有

$$\mathbf{u}_1=\frac{-1}{c_1}\sum_{i=2}^{n} c_i \mathbf{u}_i \tag{3}$$

例 2.6-1 将说明这个意思。

例 2.6-1 矢量组

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\6\\10\\14\end{bmatrix},\qquad \mathbf{y}=\begin{bmatrix}3\\6\\0\\12\end{bmatrix},\qquad \mathbf{z}=\begin{bmatrix}1\\0\\-5\\-1\end{bmatrix}$$

是线性相关的，因为当 $c_1=-1, c_2=1, c_3=-2$ 时下式成立

$$c_1\mathbf{x}+c_2\mathbf{y}+c_3\mathbf{z}=0$$

另一方面，矢量组

$$\mathbf{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{e}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

是线性独立的．因为由线性关系

$$c_1\mathbf{e}_1+c_2\mathbf{e}_2+c_3\mathbf{e}_3=0$$

得出零矢量

$$\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=0$$

即 $c_1=c_2=c_3=0$。

矢量空间的维数正式定义如下：

定义 2.6-2 矢量空间的维数定义为含于此空间中线性独立矢量的最大个数．

在例 2.3-1 中，矢量空间是二维 xy 平面．很明显，在 xy 平面上任何两个矢量只要它们不共线，就是线性独立的，又平面上任何三个矢量必是线性相关的．更一般地，我们可以证明在 n 维矢量空间中，任一矢量组 $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\cdots,\mathbf{x}_r$，当 $r>n$ 时必是线性相关的．我们将对于空间 R^n 证明这个结论．这个证明是提示性的和构造性的．我们考察线性关系

$$\sum_{j=1}^{r} c_j\mathbf{x}_j=0 \tag{4}$$

其中 $r>n$．对 $i=1,2,\cdots,n$，设

$$\mathbf{x}_i=\begin{bmatrix}a_{1i}\\a_{2i}\\\vdots\\a_{ni}\end{bmatrix}$$

于是线性关系(4)能展成线性齐次方程组

$$\begin{aligned}&a_{11}c_1+a_{12}c_2+\cdots+a_{1r}c_r=0\\&a_{21}c_1+a_{22}c_2+\cdots+a_{2r}c_r=0\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&a_{n1}c_1+a_{n2}c_2+\cdots+a_{nr}c_r=0\end{aligned}\tag{5}$$

因为 $r>n$,方程组(5)经常有非平凡解[Murdoch,1957].

现在考察下面的定义及其推论.

定义 2.6-3 任何一组 n 个线性独立的矢量称为是 n 维矢量空间的一个基底.

在空间 R^n 中,矢量组

$$\mathbf{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad\cdots,\quad \mathbf{e}_n=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}\tag{6}$$

构成一个基底.这些矢量有时称为是 n 维数空间的基矢量.(对 n 维数空间记法(6)并非是始终使用的基矢量.)例 2.6-1 中的矢量 x,y,z 是四维数空间的元素.如果把例 2.6-1 中的矢量用 e 基矢量表出,则有

$$\begin{aligned}&\mathbf{x}=\mathbf{e}_1+6\,\mathbf{e}_2+10\,\mathbf{e}_3+14\,\mathbf{e}_4\\&\mathbf{y}=3\,\mathbf{e}_1-6\,\mathbf{e}_2+0\,\mathbf{e}_3+12\,\mathbf{e}_4\\&\mathbf{z}=\mathbf{e}_1+0\,\mathbf{e}_2-5\,\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_4\end{aligned}$$

抽象的 n 维实矢量空间(记作 $R(n)$)的任一矢量可由基矢量来表出.例如,设 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_n$ 为任一组基矢量,于是

$$\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{u}_i \tag{7}$$

数 x_i(称为 x 在基 u 中的坐标)当 x 与基矢量 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_n$ 给定时是唯一确定的. 为要证明唯一性，设 x 在同一基底中有不同的坐标 y_i. 也即除了(7)式以外,假设 x 也可以表示为

$$\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n} y_i\mathbf{u}_i \tag{8}$$

由(7)式减去(8)式,得

$$\mathbf{x}-\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)\mathbf{u}_i=0 \tag{9}$$

若设 $x_i-y_i=c_i$,于是(9)式成为

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\mathbf{u}_i=0 \tag{10}$$

但 $\mathbf{u}_i$ 是基矢量,所以它们是线性独立的. 因此方程(10)只有唯一的平凡解 $c_i=0$ 或 $x_i=y_i$.

我们断言在 $R(n)$ 中任何两个矢量的和的坐标可由它们对应的坐标相加得出. 例如,若矢量 x 与 y 在基 u 中有坐标 x_i 与 y_i,则矢量 $\mathbf{z}=\mathbf{x}+\mathbf{y}$ 在基 u 中的坐标为 $z_i=x_i+y_i$,用记号表出是

$$\mathbf{z}=\mathbf{x}+\mathbf{y}=\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{u}_i+\sum_{i=1}^{n} y_i\mathbf{u}_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)\mathbf{u}_i$$

再对任一标量 α,乘积矢量 $\mathbf{z}=\alpha\mathbf{x}$ 的坐标由下式得出:

$$\mathbf{z}=\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i)\mathbf{u}_i$$

我们已经确定了: $R(n)$ 中的任一矢量 x 可用 n 个数,即对于

某一抽象基 $\mathbf{u}$ 的坐标 x_i 来表示．并且进一步指出对矢量的线性运算可化为对于它们的分量或坐标的同样的运算．例如，我们刚才已说明了在 $R(n)$ 中任一矢量 $\mathbf{z}=\mathbf{x}+\mathbf{y}$ 的坐标可由它们各自的坐标相加而得到．在(2.4-5)式中，我们同样证明了 R^n 中两个矢量的和的坐标可由它们各自的坐标相加得出．R^n 与 $R(n)$ 之间的这个对应关系的更准确的说法是 R^n 与 $R(n)$ 是同构的．更一般说来，任一个 n 维实矢量空间与 R^n 是同构的[Halmos,1958]．我们不从本质上去详述这个内容，学生可直接阅读希洛夫[1961]的书．

同构性质本质上允许我们研究 R^n 或 $R(n)$ 中的矢量时可取最方便的那个来进行．在所学的课程中，我们一般将要用到这两个空间．作为一个例子，对(7)式所定义的 $R(n)$ 中的矢量 $\mathbf{x}$，若适合于我们的需要可考虑 R^n 中的"坐标"矢量

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

自然，这里坐标 x_i 是对适当的基底来定义的．

在例 2.6-1 中我们考察了四维数空间中的三个数值矢量 $\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$，$\mathbf{z}$．如果这些矢量是线性独立的，则它们可作为基矢量来产生一个空间．这样产生的空间的维数应当是 3．这就是说，由一组矢量所产生的空间的维数等于该组线性独立矢量的个数．于是我们要问：是否可能对三个线性独立的矢量 $\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$，$\mathbf{z}$ 再增加第四个矢量 $\mathbf{w}$ 使得 $\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$，$\mathbf{z}$ 与 $\mathbf{w}$ 组成四维空间的基底？回答是肯定的，而且还可更一般地有：如果 $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_r$ 是一个线性空间的线性独立矢量，该空间的维数 $m>r$，则必存在 $m-r$ 个线性独立矢量 $\mathbf{x}_{r+1},\cdots,\mathbf{x}_m$ 使得矢量组

$$\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_r,\mathbf{x}_{r+1},\cdots,\mathbf{x}_m$$

构成此空间的基底。

例 2.6-2 在例 2.6-1 中，两个矢量 $\mathbf{e}_1$ 与 $\mathbf{e}_2$ 是三维数空间中的线性独立矢量。它们一同构成二维数空间的基底。如果加入第三个矢量 $\mathbf{e}_3$，则矢量组 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 构成三维数空间的一个基底。

在前面的讨论中，我们已提及矢量空间之内还含有其它的矢量空间。例如，xy 平面是含于三维空间内的一个空间。也即 xy 平面上的每一个矢量也是三维空间的一个矢量。同样二维数空间含于三维数空间之中。我们称 xy 平面及二维数空间各自是它们的更一般的三维空间的子空间。虽然子空间是下一节的论题，在这里我们给一个直观的定义并建立一些记号。如果 V_1 与 V_2 是两个线性空间并且 V_1 中的一切矢量也在 V_2 之中，则 V_1 称为 V_2 的子空间。为要表明 V_1 是 V_2 的子空间，我们记作 $V_1 \subset V_2$。这个记法并不排除 $V_1 = V_2$ 的可能性。若 $V_1 \subset V_2$ 但 $V_1 \neq V_2$，则 V_1 称为是 V_2 的一个真子空间。

2.7. 子空间与超平面

设矢量空间 V 元素的一个集合 L 满足条件：

1. 对 L 中的每一对 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$，其和 $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ 是在 L 中。
2. 对 L 中的每一个 $\mathbf{x}$ 及一实数 λ，矢量 $\lambda\mathbf{x}$ 是在 L 中。

换言之，集合 L 在加法及数乘下是封闭的，我们称集合 L 是 V 的一个子空间，且用记号 $L \subset V$ 表示 L 中的每一个矢量是 V 的一个矢量。子空间满足 §2.5 中线性空间的一切公理。特别是若 $\mathbf{x}$ 在 L 中，则 $\mathbf{x}-\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 也在 L 之中。换言之，子空间包含原点。

设 A 与 B 是线性空间 V 的任意两个子空间，又空间 D 含有 A 与 B 的一切公共矢量，称 D 为 A 与 B 的交，记作 $D = A \cap B$。我们能证明 D 是一个矢量空间。因 $\mathbf{x}$ 在 D 中，就意味着 $\mathbf{x}$ 既属于 A 又属于 B，所以 $\lambda\mathbf{x}$ 同时属于 A 与 B 二者之中，因此也属于 D。其次，若 $\mathbf{y}$ 也在 D 中，它属于 A 与 B 二者之中，故 $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ 也属

于 A 与 B 二者之中，因之也属于 D。所以集合 D 在加法与数乘下是封闭的，因此是一个矢量空间。

两个空间 A 与 B 的和或并，记作 $A+B$，它也是一个矢量空空。空间 $A+B$ 定义为一切形如 $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ 的矢量的集合，其中 $\mathbf{x}$ 在 A 中，$\mathbf{y}$ 在 B 中。读者容易验证和集在加法与数乘下是封闭的。要证明[Halmos, 1958]两个子空间和的维数等于两者维数的和减去其交的维数是可能的。例如在三维空间中，xy 平面可作为一个子空间，xz 平面可作为另一个子空间，这两个平面的交是 x 轴且有维数 1。因此这两个平面的和的维数是 $2+2-1=3$。这两个空间加在一起产生一个三维空间。

因为子空间是一个线性空间，它必有一组基矢量。基矢量的个数等于子空间的维数。设 M 是 V 的一个 m 维的子空间，于是在 M 中存在 m 个线性独立矢量。反之，在 M 中任何 m 个线性独立的矢量是 M 的一个基底。设 M 的基矢量记作 $\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\cdots,\mathbf{f}_m$，且 V 的维数 $n>m$。空间 V 的基矢量可选取为

$$\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\cdots,\mathbf{f}_m,\mathbf{f}_{m+1},\cdots,\mathbf{f}_n$$

这就是说，V 的基底可由子空间 M 的基矢量加上另外的矢量 $\mathbf{f}_{m+1},\cdots,\mathbf{f}_n$ 构成。

我们注意到子空间含有原点或零矢量。在三维空间中其几何含意是明显的。一个平面或一条直线若通过原点则是三维空间的一个子空间。若把平面或直线移动使其不通过原点，则所得的平面或直线称为是一个超平面。

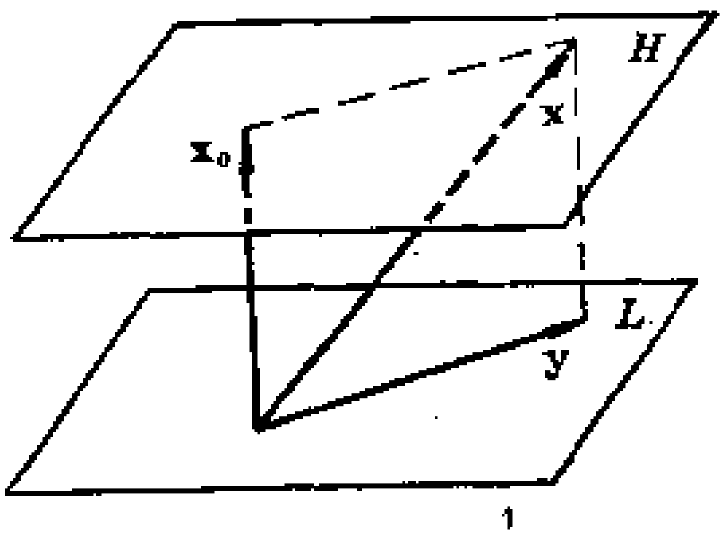


图 2.7-1 超平面的几何意义。

图 2.7-1 所示的是超平面的几何意义。设 L 为一子空间，$\mathbf{x}_0$ 是一个固定矢量，一般不属于 L。考察如图中所示的

矢量集合 $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+\mathbf{y}$，其中矢量 $\mathbf{y}$ 在子空间 L 上变动。由此所得的一切矢量 $\mathbf{x}$ 的集合确定了一个超平面 H。超平面的维数是被移动的子空间的维数。

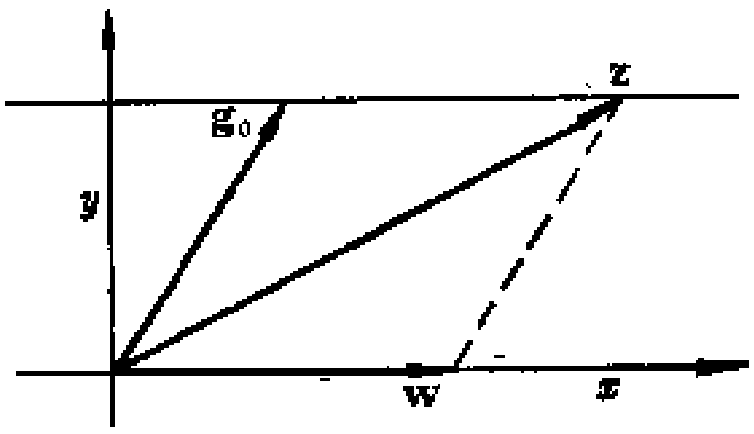


图 2.7-2 二维空间的一个超平面的例子。

为了进一步说明这个概念，考察如图 2.7-2 所示的二维空间（xy 平面）。维数为 1 的超平面（称为直线）是一切矢量 $\mathbf{z}=\mathbf{g}_0+\mathbf{w}$ 的集合，其中 $\mathbf{w}$ 是通过原点且平行于 x 轴的任一矢量。如图所示，此超平面可由移动 x 轴而得到。

现在考察矢量的"点"的概念来帮助建立超平面的性质。在图 2.7-3 中有一个超平面 H，它含有 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 的终点，即 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 都在 H 中。此外，$\mathbf{z}$ 在 H 中，其中对实数 α，

$$\begin{aligned}\mathbf{z}&=\mathbf{x}+\alpha(\mathbf{y}-\mathbf{x})\\&=\alpha\mathbf{y}+(1-\alpha)\mathbf{x}\end{aligned}$$

这个性质的几何意义是每个超平面包含通过其上任何两点的连线。在图 2.7-3 中，这两个点就是 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 的终点。在超平面上的这条直线由矢量 $\mathbf{z}$ 的终点所描出。

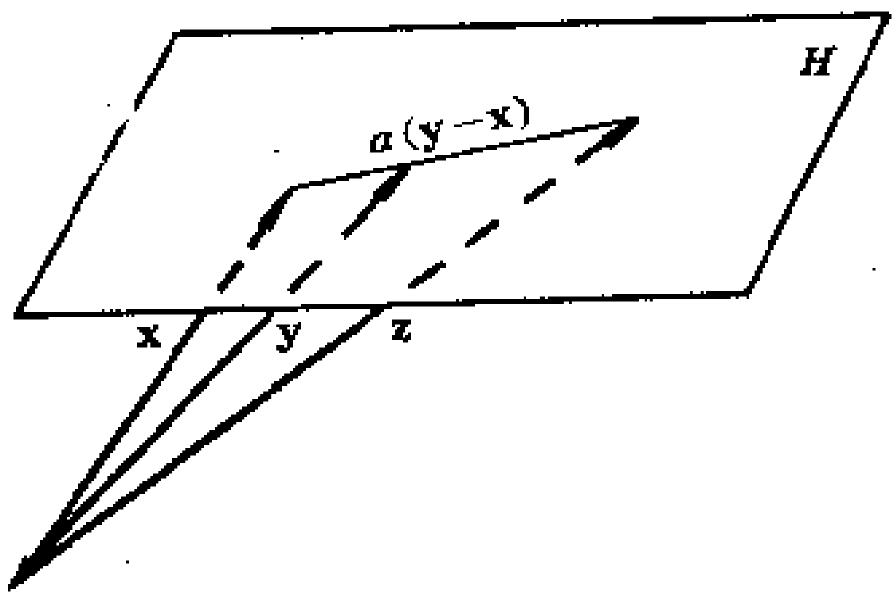


图 2.7-3 超平面包含其上点的连线。

2.8. 内积空间

我们已经说明矢量空间包含零矢量 **0**，并称之为原点。此外，从关于矢量与矢量空间的几何概念，对任一矢量到原点的距离并没有言明。现在要求用准确的语言来表达从原点出发的距离概念。

定义 2.8-1 矢量 $\mathbf{x}$ 的大小或长度，记作 $\|\mathbf{x}\|$，称为 $\mathbf{x}$ 的范数。一个线性空间称为赋范的，若对含于空间中的每一个 $\mathbf{x}$ 存在一个具有下列性质非负的数 $\|\mathbf{x}\|$：

(i) $\|\mathbf{x}\|\geqslant 0$ 并当且仅当 $\mathbf{x}=0$ 时，$\|\mathbf{x}\|=0$。

(ii) $\|\alpha\mathbf{x}\|=|\alpha|\,\|\mathbf{x}\|$，其中 $|\alpha|$ 是复标量 α 的绝对值。

(iii) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|\leqslant\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$（三角形不等式）。

在此首先有兴趣的是确定并讨论内积的性质与作用。内积是范数，它几乎应用于整个的课程中。我们指出可以定义许多不同的范数（几个例子见于习题中）。对每一种范数，矢量的长度是不同的。这就是说，矢量的长度是用范数来定义的，因此不是唯一的[Halmos,1958]。

首先介绍两个实矢量的内积或标量积。对实矢量空间，下面的定义正式给出内积的概念。

定义 2.8-2 两个实矢量 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 的内积，记作 $(\mathbf{x},\mathbf{y})$，是一个满足下列条件的实数：

(i) $(\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{y},\mathbf{x})$ （对称律）。

(ii) $(\mathbf{x},\mathbf{y}+\mathbf{z})=(\mathbf{x},\mathbf{y})+(\mathbf{x},\mathbf{z})$ （分配律）。

(iii) 对实标量 λ，$(\lambda\mathbf{x},\mathbf{y})=\lambda(\mathbf{x},\mathbf{y})$。

(iv) $(\mathbf{x},\mathbf{x})\geqslant 0$，并当 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 时 $(\mathbf{x},\mathbf{x})=0$。

在内积空间中矢量间一个重要的关系是正交性。若两个矢量的内积为零，则称它们是正交的。在随后的讨论中将会看到这个概念确实是一个重要的概念。我们也要指出内积空间是赋范线性

空间，但其逆一般是不真的．亦即赋范空间按定义是一个空间，在其中给定了长度的一个适当的定义．

同三维矢量空间一样，在 n 维线性空间内积可用于定义交角．由几何学，两个矢量的内积定义为

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\theta \tag{1}$$

其中 θ 是 x 与 y 之间的交角．因此，在线性空间中，交角形式地用关系

$$\cos\theta=\frac{(\mathbf{x},\ \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|},\qquad 0\leqslant\theta\leqslant\pi \tag{2}$$

来定义．对于非零矢量 x 与 y，(2)式指出，若 $(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$，则 $\cos\theta=0$．这时说矢量 x 正交于矢量 y，反之也对．

为要说明(2)式给出的交角的一般定义正确，$(\mathbf{x},\mathbf{y})/\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|$ 在大小上不超过 1 是必要的．这个一般的结论就是熟知的许瓦尔兹不等式．这就是说，设 x 与 y 是线性空间中的任意两个矢量，则一般的关系

$$|(\mathbf{x},\mathbf{y})|\leqslant\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \tag{3}$$

总是成立的，(3)称为许瓦尔兹不等式．为要说明定义 2.8-2 中条件的运用，在实矢量空间中，我们证明(3)式是正确的．若 x 或 y 为零，此不等式显然成立．今设 λ 为一实数，利用内积的性质作下列运算：

$$\begin{aligned}\|\lambda\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2&=(\lambda\mathbf{x}+\mathbf{y},\ \lambda\mathbf{x}+\mathbf{y})\\&=\lambda^2\|\mathbf{x}\|^2+2\,\lambda(\mathbf{x},\mathbf{y})+\|\mathbf{y}\|^2\geqslant 0\end{aligned} \tag{4}$$

(4)式对 λ 是二次的，只当它的判别式

$$4(\mathbf{x},\mathbf{y})^2-4\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 \tag{5}$$

是负的或零时，它是正的或零．换言之，

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})^2\leqslant\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2$$

取正的平方根，就得到许瓦尔兹不等式[不等式(3)]．

现在证明内积满足范数的性质．内积满足定义 2.8-1 中的性

质(i)与(ii)是显然的．尚须证明的是内积满足三角形不等式．我们采用一些几何观点来帮助证明，并认为不等式的名称是合理的．设 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 是任二个矢量，于是从几何上，和 $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ 称为三角形的第三边，如图 2.8-1 所示．这个图形描绘了三角形不等式的几何意义：三角形二边长度的和等于或大于第三边的长度．

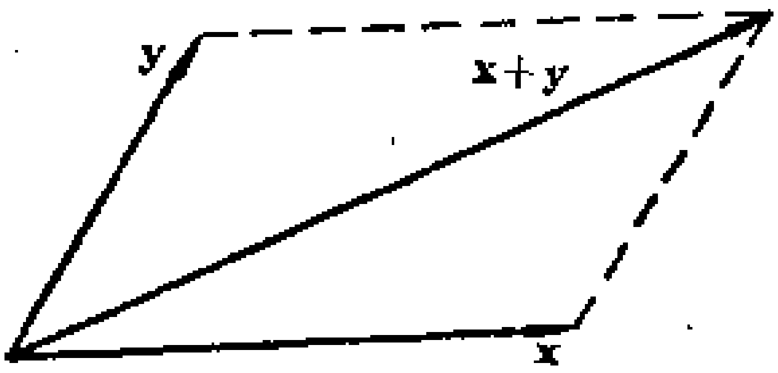


图 2.8-1　三角不等式．

为要证明内积满足三角形不等式，考察下列关系：

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2=(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y})=(\mathbf{x},\mathbf{x})+2(\mathbf{x},\mathbf{y})+(\mathbf{y},\mathbf{y})$$
$$=\|\mathbf{x}\|^2+2(\mathbf{x},\mathbf{y})+\|\mathbf{y}\|^2$$

利用许瓦尔兹不等式得到

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2\leqslant\|\mathbf{x}\|^2+2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|+\|\mathbf{y}\|^2=(\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|)^2$$

这就证明了断言．下面的例子给出内积的实际解释．

例 2.8-1　设 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 是内积空间的矢量，于是

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2+\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2=(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y})+(\mathbf{x}-\mathbf{y},\mathbf{x}-\mathbf{y})$$
$$=\|\mathbf{x}\|^2+2(\mathbf{x},\mathbf{y})+\|\mathbf{y}\|^2+\|\mathbf{x}\|^2-2(\mathbf{x},\mathbf{y})+\|\mathbf{y}\|^2$$
$$=2\|\mathbf{x}\|^2+2\|\mathbf{y}\|^2$$

这个关系的图解揭示了一个普遍的几何定理，平行四边形两对角线($\mathbf{x}+\mathbf{y}$及$\mathbf{x}-\mathbf{y}$)的平方和等于两邻边平方和的二倍．

现在考察实空间 $R(n)$的基矢量 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_n$．在基 $\mathbf{u}$中，矢量 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 的坐标分别记作 α_i 与 β_i．从而

$$\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{u}_i,\qquad \mathbf{y}=\sum_{j=1}^{n}\beta_j\mathbf{u}_j \tag{6}$$

利用内积的分配律，得到

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\beta_jS_{ij} \tag{7}$$

其中 S_{ij} 是由 $S_{ij}=(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_j)$ 给出的实数．若 $\mathbf{x}=\mathbf{y}$，则

$$(\mathbf{x},\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i a_j S_{ij} \tag{8}$$

若基底是正交的，则(7)与(8)中的两个内积可以简化．

定义 2.8-3 一组实矢量 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_r$ 称为是标准正交的，若对于一切 $i,j=1,2,\cdots,r$，有

$$(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}$$

例 2.6-1 中的线性独立矢量 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ 是标准正交矢量而且是基矢量．二维行矢量$\frac{1}{\sqrt{2}}[1\ \ 1]$ 与 $\frac{1}{\sqrt{2}}[-1\ \ 1]$也是标准正交的．若一个空间的基矢量是标准正交的，我们说这个基底是标准正交基底．随后的讨论将会证明从所给的一组基矢量要作出一个标准正交基底总是可能的．

在标准正交基底中，内积(7)化为

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i \tag{9}$$

其中 x_i 与 y_i 是 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 在某一标准正交基底中的坐标． $\mathbf{x}$ 同它本身的内积是

$$(\mathbf{x},\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \tag{10}$$

若 $n=3$，(10)式化为在解析几何中熟悉的长度表达式：

$$(\mathbf{x},\mathbf{x})^{1/2}=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1/2} \tag{11}$$

其中 x_1,x_2，与 x_3 是 $\mathbf{x}$ 关于某一标准正交基底的坐标．

这个熟悉的长度概念可以容易地推广到 n 维空间．我们简单地用内积作为范数：

$$\text{norm }\mathbf{x}=\|\mathbf{x}\|=(\mathbf{x},\mathbf{x})^{1/2} \tag{12}$$

一般说来，在标准正交基底下，(12)式经常理解为

$$\|\mathbf{x}\|=(\mathbf{x},\mathbf{x})^{1/2}=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \tag{13}$$

(8)式表示内积的更一般的形式，在以后各章中只要它满足定义2.8-1诸条件就用作范数。我们将在§3.11中讨论更一般的范数。

一个具有内积的实 n 维矢量空间称为欧氏空间。我们用已建立的记号 $R(n)$ 和 R^n 来记 n 维欧氏空间。换言之，在今后的讨论中当说到 $R(n)$ 和 R^n 时，就了解为它们是实内积空间。(11)式给出欧氏空间 R^3 中矢量的长度。学生无疑从解析几何熟悉 R^3，其中长度由勾股定理确定：直角三角形的两个直角边的平方之和等于斜边的平方。

利用解析几何的思想，我们叙述一些其他有用的概念。在内积空间中，两个矢量间的距离定义为

$$\rho(\mathbf{x},\mathbf{a})=\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|=(\mathbf{x}-\mathbf{a},\mathbf{x}-\mathbf{a})^{1/2} \tag{14}$$

假设先考察 R^2 中两个矢量间的距离。设 $\mathbf{a}$ 关于某一标准正交基底有坐标 a_1 与 a_2，r 为 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{a}$ 间的距离，则

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^2=(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2=r^2 \tag{15}$$

显然，方程(15)定义一个中心在 (a_1,a_2) 半径为 r 的圆周。图2.8-2给出方程(15)的几何解释。

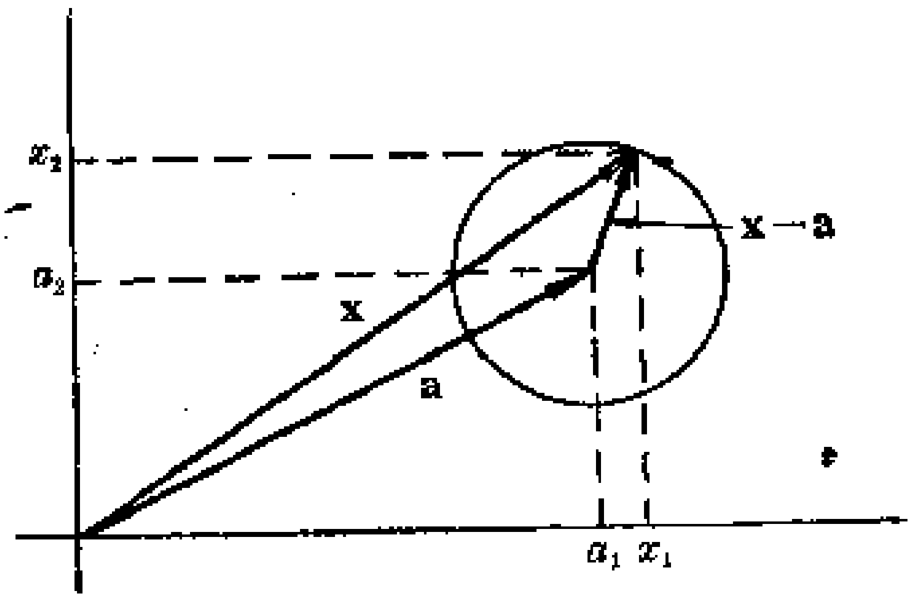


图 2.8-2　两个矢量 x 与 a 之差的几何解释。

为了推广前面的思想，用记号

$$C(a_1,a_2)=\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|$$

表示范数 $\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|$ 定义一

个圆周。因此，不等式

$$C(a_1, a_2) < r$$

表示含于中心在$(a_1,\ a_2)$半径为r的圆域中一切点（即一切矢量的终点）的集合。推广这些概念到R^3，认为

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| = r \tag{16}$$

是一个中心在(a_1, a_2, a_3)半径为r的球面。在n维中考察，我们说方程(16)定义一个超球面，并且说范数

$$S(\mathbf{a}, r) = \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < r \tag{17}$$

定出一个中心在$\mathbf{a}$半径为r的球域。

下面诸例子有助于说明前面一些概念。

例 2.8-2 若矢量组$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_r$的每一个正交于矢量$\mathbf{x}$，则$\mathbf{x}$正交于任一线性组合

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{u}_i$$

要证明它，只要证明$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$就足够了。利用内积的性质依次有

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{r} (\mathbf{x}, \alpha_i \mathbf{u}_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i (\mathbf{x}, \mathbf{u}_i)$$

但由假定$(\mathbf{x}, \mathbf{u}_i) = 0$，故有$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$。

例 2.8-3 我们能够证明任一正交矢量组$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_r$是线性独立的。考察线性关系

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{u}_i = \mathbf{0} \tag{18}$$

于是对$i = 1, 2, \cdots, r$得到

$$\left(\mathbf{u}_i,\ \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{u}_i\right) = (\mathbf{u}_i, \mathbf{0}) = 0$$

但

$$\left(\mathbf{u}_i,\ \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{u}_i\right) = \alpha_i \|\mathbf{u}_i\|^2 = 0$$

且因$\|u_i\|\neq 0$，故 $\alpha_i=0$。换言之，关系式(18)对一切 i 只有平凡解 $\alpha_i=0$。

现在介绍所谓一个矢量的傅里叶系数。设 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是空间 $R(n)$ 中的任一标准正交基底，使得 $R(n)$ 中任一 y 能写成

$$y=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i \tag{19}$$

数 ξ_i 称为矢量 y 关于标准正交基底 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 的分量、傅里叶系数或傅里叶常数。这些常数可用矢量 y 与基矢量明显地表出。考察内积

$$(e_j,y)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i(e_j,e_i) \tag{20}$$

此式右方化为 ξ_j。因此对 $j=1,2,\cdots,n$，有傅里叶系数

$$\xi_j=(e_j,y) \tag{21}$$

把(21)代入(19)式，得到 $R(n)$ 中的任一 y 可以有表达式

$$y=\sum_{i=1}^{n}(e_i,y)e_i \tag{22}$$

现在说明由所给的任一组基矢量作出标准正交基底的方法。设 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 是空间 $R(n)$ 的基矢量。问题在于得出此空间的一个标准正交基底。

我们记标准正交基矢量为 $e_1,e_2,\cdots,e_n$。开始时，设 $e_1=\frac{u_1}{\|u_1\|}$ 是第一个基矢量。为作出顺次的第二个矢量，取

$$f_2=u_2-\alpha_1 e_1$$

其中 α_1 是待定常数。利用条件 $(e_1,f_2)=0$ 得到

$$(e_1,f_2)=(e_1,u_2)-\alpha_1(e_1,e_1)=0$$

由此

$$\alpha_1=(e_1,u_2)$$

于是第二个矢量 e_2 得出为

$$\mathbf{e}_2=\frac{\mathbf{f}_2}{\|\mathbf{f}_2\|}=\frac{\mathbf{u}_2-(\mathbf{e}_1,\mathbf{u}_2)\mathbf{e}_1}{\|\mathbf{f}_2\|}$$

顺次的再一个矢量可用相似的方式得出．作出

$$\mathbf{f}_3=\mathbf{u}_3-\alpha_1\mathbf{e}_1-\alpha_2\mathbf{e}_2$$

并利用条件$(\mathbf{e}_1,\mathbf{f}_3)=(\mathbf{e}_2,\mathbf{f}_3)=0$．如此继续作下去，得到一般结果

$$\mathbf{f}_r=\mathbf{u}_r-\sum_{i=1}^{r-1}(\mathbf{u}_r,\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i \tag{23}$$

而

$$\mathbf{e}_r=\frac{\mathbf{f}_r}{\|\mathbf{f}_r\|}$$

由(23)式所概括的方法称为施密特标准正交化过程[Gantmacher, 1959]．这样得出的矢量组不是唯一的，因为当 u 基矢量改变次序时会得出一个新的标准正交组．

2.9．复内积空间

虽然我们绝大部分讨论是在欧氏空间中，还需要简略地介绍一下复内积矢量空间，即酉空间．用本节中介绍的基本思想读者不难把对欧氏空间提出的思想推广到酉空间．

对 n 维复矢量空间 $C(n)$的任意矢量 $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$ 及对复标量 α，定义内积作为一个复数具有性质：

(i) $(\mathbf{x},\mathbf{y})=\overline{(\mathbf{y},\mathbf{x})}$

(ii) $(\alpha\mathbf{x},\mathbf{y})=\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y})$

(iii) $(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{z})=(\mathbf{x},\mathbf{z})+(\mathbf{y},\mathbf{z})$

其中$\overline{(;)}$是$(;)$的共轭复数．由性质(i)得出$(\mathbf{x},\mathbf{x})=\overline{(\mathbf{x},\mathbf{x})}$是一个实数．从而 x 的范数定义为$\|\mathbf{x}\|=(\mathbf{x},\mathbf{x})^{1/2}$．与 2.8-9 相一致，在空间 $C(n)$中内积定义为

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_{i=1}^{n}x_i\bar{y}_i \tag{1}$$

故 x 的范数是

$$\|\mathbf{x}\|=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{x}_i\right)^{1/2} \tag{2}$$

一些进一步的性质在下列例子中证明之。

例 2.9-1 由上面的性质，我们也能建立性质(iv)及(v)：

(iv) $(\mathbf{x},\alpha\mathbf{y})=\bar{\alpha}(\mathbf{x},\mathbf{y})$

(v) $(\mathbf{x},\mathbf{y}+\mathbf{z})=(\mathbf{x},\mathbf{y})+(\mathbf{x},\mathbf{z})$

证明性质(iv)，利用性质(i)与(ii)：

$$\begin{aligned}(\mathbf{x},\alpha\mathbf{y})&=\overline{(\alpha\mathbf{y},\mathbf{x})} &&[\text{性质(i)}]\\ &=\overline{\alpha(\mathbf{y},\mathbf{x})} &&[\text{性质(ii)}]\\ &=\bar{\alpha}\,\overline{(\mathbf{y},\mathbf{x})}=\bar{\alpha}(\mathbf{x},\mathbf{y}) &&[\text{性质(i)}]①\end{aligned}$$

证明性质(v)，利用性质(i)与(iii)：

$$\begin{aligned}(\mathbf{x},\mathbf{y}+\mathbf{z})&=\overline{(\mathbf{y}+\mathbf{z},\mathbf{x})} &&[\text{性质(i)}]\\ &=\overline{(\mathbf{y},\mathbf{x})+(\mathbf{z},\mathbf{x})} &&[\text{性质(iii)}]\\ &=\overline{(\mathbf{y},\mathbf{x})}+\overline{(\mathbf{z},\mathbf{x})}\\ &=(\mathbf{x},\mathbf{y})+(\mathbf{x},\mathbf{z}) &&[\text{性质(i)}]①\end{aligned}$$

2.10. 正交空间与正投影

在例 2.8-2 中我们已证明：若矢量 x 与矢量组 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_r$ 正交，则它正交于这些矢量的任一线性组合，即正交于矢量

$$\mathbf{y}=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\mathbf{u}_i \tag{1}$$

设想 r 个矢量 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_r$ 是 n 维空间 V 的线性独立矢量，其中 $n>r$。取矢量 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_r$ 作为 r 维子空间 L 的基矢量，则 L 中的任一矢量可写成(1)式。若 x 在 V 中，且对 L 中一切 y 有 $(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$，则称 x 正交于空间 L。换言之，x 正交于由矢量 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_r$ 所生成的空间。反之，任一矢量正交于空间 L 必正交于 L 中的

① 回忆起：乘积的共轭是共轭的乘积，和的共轭是共轭的和。

每一个矢量.

现在证明正交于L的矢量的集合构成一个矢量空间. 为此目的,设$\mathbf{x}$与$\mathbf{z}$为V中任二个矢量,它们都正交于空间L. 显然,对于标量α与β,矢量$\alpha\mathbf{x}$与$\beta\mathbf{z}$都正交于空间L,故此集合在数乘下是封闭的. 为要证明此集合在加法下是封闭的,我们注意到

$$\begin{aligned}(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{z},\mathbf{y})&=(\alpha\mathbf{x},\mathbf{y})+(\beta\mathbf{z},\mathbf{y})\\&=\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y})+\beta(\mathbf{z},\mathbf{y})\\&=\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0=0\end{aligned}$$

换言之,V中的矢量$\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{z}$与$L$中的任一矢量$\mathbf{y}$正交,所以此集合在加法下是封闭的。下面的例子说明这些思想。

例 2.10-1 设L是R的一维(直线)子空间. 在几何上,我们把子空间L看作是过坐标原点的一条直线. 与此直线共线的任一矢量与平面M上的任一矢量正交,这个平面垂直于直线L.

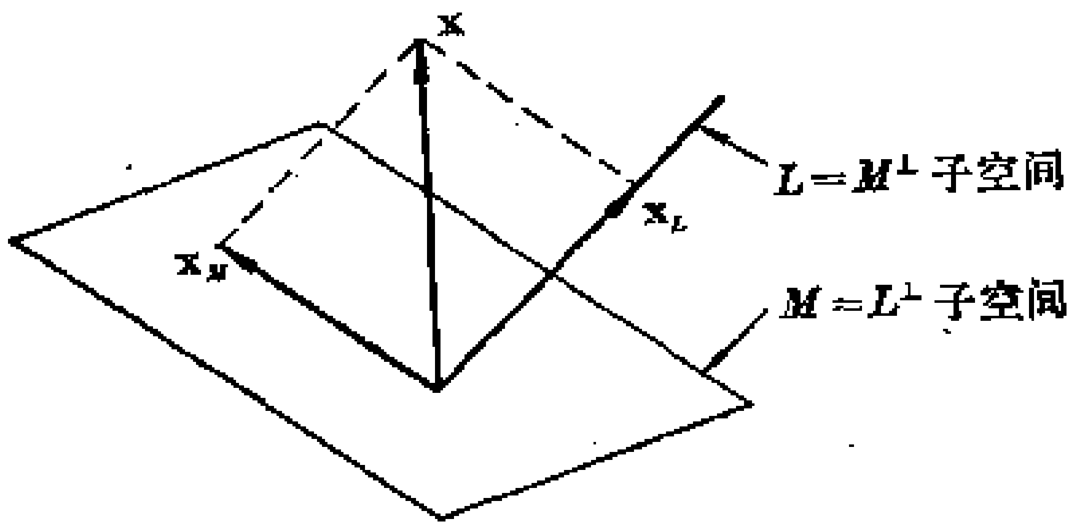


图 2.10-1 正交空间.

图 2.10-1 说明例 2.10-1. 为了推广图中说明的几何概念,考察线性矢量空间V的两个子空间L与M,其中L是所有矢量正交于空间M的空间. 子空间L定义为M的正交补空间,反之也一样. 为了指出L是M的正交补空间, 我们采用记号$L=M^{\perp}$. 这就是说,$M^{\perp}$是M的正交补空间;$L^{\perp}$是L的正交补空间,等等.

我们能证明$L=M^{\perp}$与$M=L^{\perp}$的和就是空间V; 即$L+M=V$,或$L+L^{\perp}=V$,或$M+M^{\perp}=V$. 并且若M的维数为m,则L的

维数为 $n-m$，以及交 $L\cap M=\mathbf{0}$。换言之，二者之交只含有零矢量。我们要证明交是零，只要注意到 L 中每一个矢量 $\mathbf{u}$ 正交于 M 中每一个矢量 $\mathbf{v}$，于是就得到 $L\cap M=\mathbf{0}$，因为 $\mathbf{0}$ 是唯一的与自己正交的矢量。依据例 2.10-1，L 与 M 的交显然是零，因为子空间 L（直线）与子空间 M（平面）的唯一公共矢量是零矢量。空间 R 由平面与直线相加而形成。这就是说，十分明显，R 中的任一个 $\mathbf{z}$ 能写成 $\mathbf{z}=\mathbf{u}+\mathbf{v}$，或 $R=L+M$，其中 $\mathbf{u}$ 在 L 中，$\mathbf{v}$ 在 M 中。

前面的讨论提供了一个一般的情况。今提出表达一个矢量 $\mathbf{z}$ 成唯一的形式 $\mathbf{z}=\mathbf{u}+\mathbf{v}$ 的一般问题。我们断言[Shilov, 1961]若 $L\subset V$ 是 $M\subset V$ 的正交补空间，则 V 中每一个 $\mathbf{z}$ 都能唯一地写成形式

$$\mathbf{z}=\mathbf{u}+\mathbf{v} \tag{2}$$

其中 $\mathbf{u}$ 在 $L=M^{\perp}$ 中，$\mathbf{v}$ 在 $M=L^{\perp}$ 中。

若任意两个子空间 A 与 B 的交是零，(2)式的分解一般是成立的。若矢量空间 V 是两个子空间，比如说 A 与 B 的和，它们的交是零，则空间 V 称为 A 与 B 的直和[Murdoch, 1957]。为了明显指出 V 是直和，我们用记号

$$V=A\oplus B \tag{3}$$

于是 V 中任一矢量 $\mathbf{z}$ 可以表成

$$\mathbf{z}=\mathbf{z}_A+\mathbf{z}_B \tag{4}$$

其中 $\mathbf{z}_A$ 在 A 中，$\mathbf{z}_B$ 在 B 中。

从前面的讨论显然有若 Q 是矢量空间 V 的任一子空间，则

$$V=Q\oplus Q^{\perp} \tag{5}$$

因为 Q 与 $Q^{\perp}$ 的交是零。今考察定义：

定义 2.10-1 设 L 是 M 的正交补空间，且设 $\mathbf{x}=\mathbf{x}_L+\mathbf{x}_M$，其中 $\mathbf{x}_L$ 在 L 中，$\mathbf{x}_M$ 在 M 中。矢量 $\mathbf{x}_M$ 称为是 $\mathbf{x}$ 在空间 M 上的正投影。矢量 x_L 是 $\mathbf{x}$ 在空间 L 上的正投影。

定义 2.10-1 可由图 2.10-1 说明之。下面的例子也有助于说

明这些概念。

例 2.10-2 设想要将矢量 $\mathbf{x}$ 写成两个矢量的和，一个在矢量 $\mathbf{y}$ 的方向，而另一个与 $\mathbf{y}$ 正交。为解决这个问题，令 $\mathbf{y}$ 产生一个一维矢量空间而去求 $\mathbf{x}$ 在由 $\mathbf{y}$ 产生的空间上的正投影。用解析式子表示，有

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}_L+\mathbf{x}_M$$

其中 $\mathbf{x}_L$ 在由 $\mathbf{y}$ 产生的空间中，$\mathbf{x}_M$ 在这个空间的正交补空间中。若 λ 是一标量，则 $\mathbf{x}_L=\lambda\mathbf{y}$，且

$$\mathbf{x}=\lambda\mathbf{y}+\mathbf{x}_M$$

现在

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=\lambda(\mathbf{y},\mathbf{y})+(\mathbf{x}_M,\mathbf{y})$$

但 $(\mathbf{x}_M,\mathbf{y})=0$，故 $\lambda=(\mathbf{x},\mathbf{y})/(\mathbf{y},\mathbf{y})$。这样分解就完成了。

例 2.10-2 的概念可以一般化。设 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_m$ 是子空间 M 的基矢量。今企图把 n 维空间 V 中的任一矢量表示为

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}_L+\mathbf{x}_M$$

其中 $V=M\oplus L$。因 $\mathbf{x}_M$ 在 M 中，可写

$$\mathbf{x}_M=\sum_{i=1}^{m}c_i\mathbf{u}_i \tag{6}$$

又因 $\mathbf{x}_L=\mathbf{x}-\mathbf{x}_M$ 在 L 中，它正交于每一个基矢量 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_m$。换言之，

$$(\mathbf{x}_L,\mathbf{u}_k)=(\mathbf{x}-\mathbf{x}_M,\mathbf{u}_k)=0,\quad k=1,2,\cdots,m$$

把(6)式代入上式，得到

$$\sum_{i=1}^{m}c_i(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_k)=(\mathbf{x},\mathbf{u}_k),\quad k=1,2,\cdots,m$$

由此看出若基 $\mathbf{u}$ 是标准正交的，就有直接的解 $c_k=(\mathbf{x},\mathbf{u}_k)$。结果系数 c_k（$\mathbf{x}_M$ 在基 $\mathbf{u}$ 中的坐标）是在各个基矢量上的正投影。（在 § 2.8 中，我们称这些系数为傅里叶常数）。下面的例子用以进一步阐述前面的结果。

例 2.10-3 考察任一组标准正交基矢量 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n$。设 $\mathbf{e}_1$ 产生一

个一维子空间 L，又设 $\mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ 产生它的 $n-1$ 维正交补空间 M。任一矢量 $\mathbf{y}$ 在 L 上的正投影可按如上方法得到。

例如

$$\mathbf{y}=\mathbf{y}_L+\mathbf{y}_M=c_1\mathbf{e}_1+\mathbf{y}_M$$

其中 c_1 是待定的标量。为求 c_1，考察

$$(\mathbf{y}, \mathbf{e}_1)=c_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)+(\mathbf{y}_M, \mathbf{e}_1)$$

今

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)=1 \quad 且 \quad \mathbf{y}_M=\sum_{i=2}^{n}c_i\mathbf{e}_i$$

故

$$(\mathbf{y}_M, \mathbf{e}_1)=\sum_{i=2}^{N}c_i(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_1)=0$$

因此，矢量 $\mathbf{y}$ 在基 $\mathbf{e}_1$ 中的坐标 $c_1=(\mathbf{y}, \mathbf{e}_1)$ 由 $\mathbf{y}$ 在单位基矢量 $\mathbf{e}_1$ 上的正投影给出。

为要考察投影的其它几何意义，设 L 是 l 维子空间，而 $L^{\perp}$ 是它的正交补空间．考察图 2.10-2 中所示的几何图解，其中 $\mathbf{x}$ 是空间 $V=L\oplus L^{\perp}$ 中的任一矢量．设 $\mathbf{y}$ 是 L 中的任一矢量并考虑斜高 $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ 及高 $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_p\|$．这里高 $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_p\|$ 是矢量 $\mathbf{x}$ 的端点与超平面 L 之间的距离。从几何上来考察，斜高大于高．用记号表示，

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_p\|\leqslant\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \tag{7}$$

(7)式形式地称为正投影定理．这个定理在最优线性估计理论或滤波理论中起着重要的作用．因此，对于实矢量空间将正式地叙述并证明这个定理．图 2.10-2 给出定理及其证明的几何意义。

定理 2.10-1（正投影） 设 V 是一个内积空间，L 是 V 的子空间．设 $\mathbf{x}$ 是 V 中一个矢量，$\mathbf{y}$ 是 L 中的任一矢量．于是对 L 中的 $\mathbf{y}$ 求使得

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_p\|\leqslant\min\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \tag{8}$$

的矢量 $\mathbf{x}_p$ 的问题等价于条件

$$(\mathbf{x}-\mathbf{x}_p, \mathbf{y})=0 \tag{9}$$

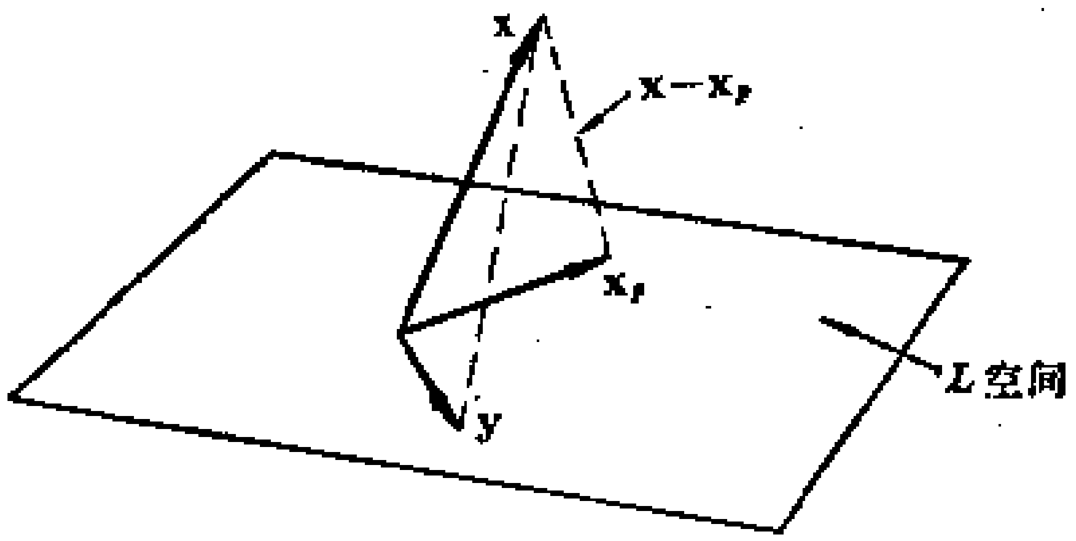


图 2.10-2 在子空间上的投影。

矢量 $\mathbf{x}_p$ 是 $\mathbf{x}$ 在子空间 L 上的正投影.

为要证充分性，假设对 L 中的任何 $\mathbf{z}$ 有 $(\mathbf{x}-\mathbf{x}_p,\mathbf{z})=0$。$L$ 中的任一 $\mathbf{y}$ 可表为 $\mathbf{y}=\mathbf{x}_p+\mathbf{z}$，其中 $\mathbf{x}_p$ 与 $\mathbf{z}$ 都在 L 中。于是

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2&=\|\mathbf{x}_p-\mathbf{x}+\mathbf{z}\|^2\\&=\|\mathbf{x}_p-\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{z}\|^2+2(\mathbf{x}_p-\mathbf{x},\mathbf{z})\\&=\|\mathbf{x}_p-\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{z}\|^2\\&\geqslant\|\mathbf{x}_p-\mathbf{x}\|^2\end{aligned}$$

这就证明了充分性。为要证必要性，假设

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_p\|\leqslant\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \tag{10}$$

由此要推出 (9)。用反证法：设 L 中存在矢量 $\mathbf{w}$，使

$$(\mathbf{x}-\mathbf{x}_p,\mathbf{w})=\alpha\|\mathbf{w}\|^2\neq0$$

其中 α 是一个常数。今设

$$\mathbf{y}=\mathbf{x}_p+\alpha\mathbf{w}$$

是 L 中任一矢量。由此得到

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2&=\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_p-\alpha\mathbf{w}\|^2\\&=\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_p\|^2+\alpha^2\|\mathbf{w}\|^2-2(\mathbf{x}-\mathbf{x}_p,\alpha\mathbf{w})\\&=\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_p\|^2-\alpha^2\|\mathbf{w}\|^2\end{aligned}$$

于是

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2-\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_p\|^2=-\alpha^2\|\mathbf{w}\|^2<0$$

这与 (10) 是矛盾的。

正投影定理给出 L 中的矢量 $\mathbf{x}_p$ 使得 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{x}_p$ 之间的距离为极小。若考察由（2.8-9）给出的两个实矢量的内积，可看出范数 $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_p\|$ 有值

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_p\|^2=\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_{pi})^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2 \qquad (11)$$

由于（11）的结构，矢量 $\mathbf{x}_p$ 称为在最小二乘方意义下 $\mathbf{x}$ 的最优估计。也即矢量 $\mathbf{x}_p$ 给出 $\mathbf{x}$ 在 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{x}_p$ 的坐标偏差平方和最小的意义下的最优估计。

参考书目

Halmos, P. R.: *Finite Dimensional Vector Spaces*, 2d ed., D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1958.

Gantmacher, F. R.: *The Theory of Matrices*, Vol. 1, Chelsea Publishing Company, New York, 1959.

Murdoch, D. C.: *Linear Algebra for Undergraduates*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1957.

Shilov, G. E.: *Theory of Linear Spaces*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1961.

习题

2.1. 在平面上由原点出发的且包含在第一象限中的一切矢量的集合是否是一个矢量空间？

2.2. 正实整数的集合是否是一个矢量空间？若按通常的意义定义加法和数乘，但限制标量域为正实整数，这是否为真？

2.3. 空间 $C(a,b)$ 定义为闭区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上连续函数 $x=x(t)$ 的集合。函数的加法运算及函数的数乘运算按分析的通常法则来定义。试证 $C(a,b)$ 是一个线性空间。

2.4. 求下列每一个矢量组的矢量和：

a. $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 8 \\ -8 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 11 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ 12 \end{bmatrix}$

2.5. 求行矢量[2 3]关于基行矢量[1 −1]与[3 5]的坐标。

2.6. 把列矢量$[2\ 1\ -1]^T$用基矢量

$$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},\quad \mathbf{x}_2=\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{x}_3=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

表出。

2.7. 在习题 2.4 中那一组矢量是否是线性独立的？

2.8. 下列矢量组那一组构成三维空间的基底？

a. $\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

2.9. 求方程

$$x+y+4z=0$$

的两个线性独立的解矢量。试证每一个解矢量能写成上面两个解矢量的线性组合，因此解空间是二维的。

2.10. 试证 $C(a,b)$(见习题 2.3)中的矢量组(函数组)

$$x_1=\cos^2 t,\quad x_2(t)=\sin^2 t,\quad x_3(t)=1$$

是线性相关的。

2.11. 试证$C(a,b)$(见习题2.3)中的矢量组(函数组)$1,t,t^2,\cdots,t^k$是线性独立的。(提示:考察线性关系

$$\sum_{i=0}^{k}c_i t^i=0$$

且微分k次.)

2.12. 若$p(t)$是t的一个k次多项式，试证$p(t)$及前k阶导数是线性独立的(见习题2.11)。

2.13. 把列矢量[1 2 4 5]^{T}用四维数空间的基矢量表出[参见(2.6-6)式]。

2.14. 二阶微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+2y=0$$

有两个解矢量(或函数)

$$y_1(x)=e^{-x},\quad y_2(x)=e^{-2x}$$

试证y_1与y_2是线性独立的,因此得出任一解矢量$y(x)$能写成y_1与y_2的线性组合,即

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

2.15. 试证实数集合是一个赋范线性空间。这时范数取作实数的绝对值。

2.16. 试证标量

$$\|\mathbf{x}\|=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

满足范数的诸性质。

2.17. 考察列矢量$x=[x_1\ x_2\cdots x_n]^T$。下面的标量是否是一个合适的范数?

$$\|\mathbf{x}\|=\max|x_i|,\quad 1\leqslant i\leqslant k$$

2.18. 求一个与列向量[3 4]^{T}正交的单位矢量。

2.19. 求两个单位矢量,它们互相正交且都与[2 2 1]正交。

2.20．求行矢量[2 7 −1]在行矢量[5 7 4]上的正投影。

2.21．求行矢量[2 −1 2]在由行矢量[2 −1 3]与[0 3 1]所生成的空间上的正投影。

2.22．设 **x** 与 **y** 是两个正交矢量，勾股定理断言：

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2=\|\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{y}\|^2$$

推广勾股定理到 n 个正交矢量的情况。

2.23．若 **x** 与 **y** 是正交矢量，它们之间的距离是什么？若 **x** 与 **y** 都是单位长度，求此距离。

2.24．在许瓦尔兹不等式中什么时候等号成立？几何解释是什么？

2.25．求两个行矢量[1 2 3]与[1 0 0]之间的交角。

2.26．若 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$，求由矢量 $\mathbf{x}=[x_1\ x_2\cdots x_n]$ 所确定的直线与坐标轴交角的余弦。[坐标轴由(2.6-6)的矢量所确定。]

2.27．求下列矢量组的内积$(\mathbf{x},\mathbf{y})$：

a．$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\ i+1\\ 2\end{bmatrix},\quad \mathbf{y}=\begin{bmatrix}i\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$

b．$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}-1\\ 3\\ i\\ -i\end{bmatrix},\quad \mathbf{y}=\begin{bmatrix}-3\\ 1\\ i+2\\ 0\end{bmatrix}$

c．求 a 与 b 中每一个 **x** 与 **y** 的长度。

2.28．求 C^3 中下列各矢量的长度：

$$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}2i\\ i\\ 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}1\\ 1+i\\ 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}_3=\begin{bmatrix}2i\\ 1-i\\ 2\end{bmatrix}$$

2.29．对习题 2.28 中的矢量求其内积$(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$与$(\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3)$。并把这两个内积与$(\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_1)$与$(\mathbf{x}_3,\mathbf{x}_2)$比较之。

2.30．用基矢量[2 0 1]，[3 −1 5]，[0 4 2]作出一个标准正交基底。

2.31．已知 R^3 中的矢量 $\mathbf{x}_1$ 与 $\mathbf{x}_2$：

$$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}2\\2\\-2\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}4\\2\\0\end{bmatrix}$$

试求空间 R^3的一个标准正交基底。

2.32. 已知 R^3 中的行矢量 $\mathbf{x}=[7\ -1\ 1]$,试求空间 R^3的一个标准正交基底。

2.33. 把矢量[5 2 1]写成两个矢量的和,一个在[4 2 0] 方向,而另一个与前者正交。

2.34. 对于矢量[1 5 6]与[4 3 0]验证三角不等式。

2.35. 对于矢量[1 −3 5 0]与[0 1 2 10]验证许瓦尔兹不等式。

2.36. 若矢量 $\mathbf{x}$,$\mathbf{y}$ 与 $\mathbf{z}$ 是线性独立的,对于矢量组 $\mathbf{x}+\mathbf{y}$,$\mathbf{x}+\mathbf{z}$ 与$\mathbf{y}+\mathbf{z}$的线性相关性我们能说些什么?

2.37. 试证两个矢量是正交的,当且只当

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2=\|\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{y}\|^2$$

(参见 §2.10 中正投影定理的证明.)

2.38. 试证 $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|=\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$ 只当 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 是线性相关时成立。

2.39. 已给一组 n 个基矢量 $\mathbf{u}_i$,一组 n 个基矢量 $\mathbf{v}_i$ 称为互反的,对偶的或伴随基底,若

$$(\mathbf{v}_i,\mathbf{u}_j)=\delta_{ij},\qquad i,j=1,2,\cdots,n$$

试证一个矢量 $\mathbf{V}$ 的欧氏长度由

$$\|\mathbf{V}\|^2=(\mathbf{x}^*,\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}x_i^*x_i$$

给出,其中 $\mathbf{x}=[x_1\ x_2\cdots x_n]$是 $\mathbf{V}$ 在基 $\mathbf{u}$ 中的坐标矢量,$\boldsymbol{x}^*=[x_1^*\ x_2^*\cdots x_n^*]$是 $\mathbf{V}$ 在基 $\mathbf{v}$ 中的坐标矢量。

2.40. 在$C(a,b)$(见习题 2.3)中两个函数$f(t)$与$g(t)$的内积由

$$(f,g)=\int_a^b f(t)g(t)dt$$

定义。利用这个内积,证明在空间 $C(-\pi,\pi)$中,函数组

$$1,\cos t,\sin t,\cos 2t,\sin 2t,\cdots$$

是正交的。

2.41. 在习题 2.40 中定义的正交三角函数组构成一个完备的基函数组。因而在 $C(-\pi,\pi)$ 中的任一函数 $h(t)$能写成这个基函数组的线性组合。求函数 $h(t)$关于基矢量的傅里叶系数。

第三章　矩阵与线性算子

3.1. 历史梗概

什么时候数学家开始使用矩阵是很难说准确的。大概它们起因于行列式，后者由雅可比(1804—1851)发展成一种简单形式。然而，某些荣誉应归于哈密尔顿(1805—1865)，他第一个观察到矩阵乘法的不可交换性。哈密尔顿对三维空间的旋转或变换找到了一个新代数。据说，1843 年十月的一天，哈密尔顿同他的妻子出去散步，这时新代数的思想闪过他的心灵，哈密尔顿太激动了，于是，他就把主要公式刻在桥近傍的石块上。此代数取名为“四元数”。哈密尔顿期望它在数学物理上会有巨大的应用。可是四元数有一些严重的缺点，以后为张量分析所替代了。如哈密尔顿所指出的四元数对矩阵代数方面是非常有限的。事实上，在 1858 年当凯莱(1821—1895)报告他的关于矩阵及其代数的著名论文时，他没有提到哈密尔顿。

矩阵理论的宽广范围像今天所了解的，包括 n 维空间的几何学及在线性变换下各种不变性质是由凯莱及他的亲密朋友西勒维斯特(1814—1897)所发展与阐明的。他们两人都是数学家与受过训练的律师。凯莱在剑桥大学教数学，西勒维斯特在维吉尼亚大学，约翰霍布金斯大学和牛津大学教数学。他们两人都执行过一段时间的律师业务[Bell,1937]。

3.2. 矩阵与矩阵代数

矩阵是一个由数排成的列阵，如(1)式所示：

$$
\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1}
$$

若数 a_{ij}(称为元素)是实的，这个矩阵称为实矩阵.若元素为复的，这个矩阵称为复矩阵. 矩阵 **A** 有 m 行 n 列. 为要指出矩阵的大小或维数，我们说它是 $m\times n$(m 乘 n)矩阵. 一般，我们把 $m\times n$ 矩阵说成长方矩阵. 若 $m=n$，矩阵是 n 阶方阵.

在(1)式中的矩阵，下标 i 与 j 分别给出元素 a_{ij} 所在的行与列. 例如，元素 a_{12} 是在第一行与第二列. 元素 $a_{11},a_{22},\cdots$ 称为主对角线元素. 一个方阵的对角线元素的和称为迹. 我们记矩阵的迹为 trace **A** = Tr **A**

如(1)式所提示的，我们一般用大写黑体罗马字母，例如，**A**，**B**，$\cdots$ 来表示一般的长方矩阵. 为了明显地表出元素及维数，可写成

$$
\mathbf{A}=[a_{ij}],\quad \begin{matrix} i=1,2,\cdots,m \\ j=1,2,\cdots,n \end{matrix} \tag{2}
$$

其中 **A** 的元素记作 a_{ij}. 只要有可能，我们采用这样的记号，即矩阵 **B** 的元素是 b_{ij}，矩阵 **C** 的元素是 c_{ij}. 一般，如在(2)式中给出下标 i 与 j 的范围并不是必要的.假若从上下文维数不是清楚的，我们就明显地表出其大小与元素被定义的域.

与矩阵 **A** 关联的另一个矩阵是由矩阵 **A** 的元素按主对角线反射而得到的. 这样得到的矩阵称为 **A** 的转置且记为 $\mathbf{A}^T$. 写作

$$
\mathbf{A}^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}
$$

若 $\mathbf{A}$ 的维数为 $m\times n$，上式指出 $\mathbf{A}^T$ 的维数为 $n\times m$。

一个矩阵有 m 行且只有一列称为列矩阵（即一个 $m\times 1$ 矩阵）。在(1)中矩阵的第 i 列为

$$\mathbf{C}_i=\begin{bmatrix}a_{1i}\\a_{2i}\\\vdots\\a_{mi}\end{bmatrix}$$

其中记号 $\mathbf{C}_i$ 用作标志第 i 列矩阵．在第二章我们定义了一列数作为一个列矢量。现在看到列矢量就是列矩阵．

矩阵 $\mathbf{A}$ 的第 i 行表示一个矩阵

$$\mathbf{R}_i=[a_{i1}\quad a_{i2}\quad \cdots\quad a_{in}]$$

这是一个 $1\times n$ 矩阵，称为行矩阵。我们也可称此矩阵是一个行矢量。如第二章所指出的，我们一般用小写黑体的罗马字母来表示行矢量．然而要注意的是这个约定不是经常坚持的，特别是当矢量是一个较大矩阵的行或列的时候．一个行矢量是列矢量的转置，反之也对。为了节省地方，我们经常写列矢量为行矢量的转置．例如，当 $\mathbf{x}$ 是一个列矢量，我们有时用 $\mathbf{x}=[x_1\quad x_2\quad \cdots\quad x_n]^T$ 代替

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

所有元素全为零的矩阵称为零矩阵，这个矩阵可以是矩形的或方的．一个对角形矩阵是一个方阵，它的元素除在主对角线上的之外其余的都是零。矩阵

$$0=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{D}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{bmatrix}$$

是零矩阵与对角形矩阵的例子．

两个矩阵相等，$\mathbf{A}=\mathbf{B}$，是指两矩阵有同样的维数且对所有可能的 i,j 有 $a_{ij}=b_{ij}$。

我们定义两个矩阵的和是第三个矩阵，它的元素是由对应元素相加而得到的。矩阵 $\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$ 的元素 c_{ij} 是 $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$。这个定义表明当两个矩阵进行相加时它们必定有相同的维数．若它们有相同的维数，则称它们在加法上是相容的．例如，和 $\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$ 明显地可由下式给出：

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix}$$

k 个相等矩阵的和，即

$$\overbrace{\mathbf{A}+\mathbf{A}+\cdots+\mathbf{A}}^{k\text{次}}$$

可写成 $k\mathbf{A}$．这个定义表明一个矩阵 $\mathbf{A}$ 乘以一个标量 k 得到一个新的矩阵，它的元素是矩阵 $\mathbf{A}$ 的元素的 k 倍．亦即 $k\mathbf{A}=[ka_{ij}]$．因此，当 $k=-1$ 时，可看出一个矩阵 $\mathbf{A}$ 的负矩阵可由 $\mathbf{A}$ 的每一个元素变号而得到．

两个矩阵的乘积 $\mathbf{AB}$ 定义为一个矩阵 $\mathbf{C}=[c_{ij}]$．元素 c_{ij} 按关系

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \tag{3}$$

来确定．其中 p 是 $\mathbf{A}$ 的列数也是 $\mathbf{B}$ 的行数．我们取两个矩阵并作出矩阵乘积 $\mathbf{AB}$ 来说明矩阵的乘法．若矩阵 $\mathbf{A}$ 是 2×3，矩阵 $\mathbf{B}$ 是 3×2，则矩阵乘积 $\mathbf{AB}$ 是

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

两个矩阵在乘法下是相容的，可看出左边矩阵的列数（**A** 有 3 列）必须等于右边矩阵的行数．矩阵 $\mathbf{C}=\mathbf{AB}$ 的元素 c_{11}，c_{12}，c_{21}，c_{22} 由(3) 式得出如下：

$$\begin{aligned}c_{11}&=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}\\c_{12}&=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}\\c_{21}&=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}\\c_{22}&=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}\end{aligned}\tag{4}$$

回顾两个矢量的内积的定义，可见 c_{11} 是 **A** 的第一行矢量与 **B** 的第一列矢量的内积．元素 c_{21} 是 **A** 的第二行矢量与 **B** 的第一列矢量的内积。(3)式一般地表示矩阵乘法的相容性。我们断言一个 $m\times r$ 矩阵 **A** 同一个 $p\times n$ 矩阵 **B** 的乘积 **AB** 只当 $p=r$ 时有定义，这时 **C** 的维数是 $m\times n$。

元素 c_{ij} 由(3)式给出，其中 $i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$．或者，元素 c_{ij} 由 **A** 的第 i 行矢量与 **B** 的第 j 列矢量的内积得出．按照(3)式，行矢量 $\mathbf{r}=[r_1\ r_2\ \cdots\ r_n]$与列矢量 $\mathbf{c}=[c_1\ c_2\ \cdots\ c_n]^T$ 的矩阵乘积是一标量。

$$\mathbf{rc}=\sum_{i=1}^{n}r_ic_i\ （矩阵乘积）\tag{5}$$

由标量积的定义，这个标量也可表示一个实的行矢量与一个实的列矢量的内积．这就是说，若 **r** 是一个行矢量与 **c** 是一个列矢量，则 **r** 与 **c** 的内积是

$$(\mathbf{r},\mathbf{c})=(\mathbf{c},\mathbf{r})=\sum_{i=1}^{n}r_ic_i\tag{6}$$

当 **r** 为一个 $1\times n$ 行矢量与 **c** 是一个 $n\times 1$ 列矢量时，比较 (5) 与 (6)，我们得到等价表达式

$$(\mathbf{r},\mathbf{c})=(\mathbf{c},\mathbf{r})=\mathbf{rc}$$

到此，我们来建立两个列矢量的内积和同样的两个矢量的矩阵乘积的关系．设 **x** 与 **y** 都是$n\times 1$ 的实的列矢量，于是内积是

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{y},\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i \tag{7}$$

显然矩阵乘积 $\mathbf{x}^T\mathbf{y}=\mathbf{y}^T\mathbf{x}$ 也是由(7)式所给的和式。因此，若 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 都是列矢量，则我们有等价表达式

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{y},\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{y}=\mathbf{y}^T\mathbf{x} \tag{8}$$

两个实矩阵的乘法可用下列例子来说明。

例 3.2-1 两个数矩阵的乘积是

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 4\\ 4 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 5\\ 6 & 8\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

矩阵的加法、乘法及标量乘法诸运算可概括出下列的法则。

1. 分配律

$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC}$

$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$

$(a+b)\mathbf{B}=a\mathbf{B}+b\mathbf{B}$　　对标量 a 与 b

$a(\mathbf{A}+\mathbf{B})=a\mathbf{A}+a\mathbf{B}$

2. 结合律

$(k\mathbf{A})\mathbf{B}=k(\mathbf{AB})=\mathbf{A}(k\mathbf{B})$　　其中 k 是标量

$\mathbf{A}(\mathbf{BC})=(\mathbf{AB})\mathbf{C}$

$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$

3. 交换律

$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$

一般说来，矩阵乘法是不能交换的。因为若 $\mathbf{A}$ 是 $m\times r$ 而 $\mathbf{B}$ 是 $r\times n$，则矩阵乘积 $\mathbf{AB}$ 是有定义的，然而乘积 $\mathbf{BA}$ 就没有定义。此外，当 $\mathbf{BA}$ 有意义时，一般也可能 $\mathbf{BA}\neq\mathbf{AB}$。下面的例子说明这一点。

例 3.2-2 设

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}6 & 0\\ -9 & 0\end{bmatrix}$$

于是

$$AB=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 3 & 0\end{bmatrix}$$

但

$$BA=\begin{bmatrix}18 & 12\\ -27 & -18\end{bmatrix}$$

有时为了方便，划分矩阵成子矩阵并按分块矩阵来施行矩阵运算。今用矩阵乘法来说明这个想法。假如我们考察矩阵 **A**.

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{cc:ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15}\\ \hdashline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45}\end{array}\right]$$

它被任意划分或分块成四个子矩阵，如用虚线标出的。将 **A** 写成分块形式如

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22}\end{bmatrix}$$

其中

$$\mathbf{A}_{11}(1\times 2)=[a_{11}\quad a_{12}]$$

$$\mathbf{A}_{12}(1\times 3)=[a_{13}\quad a_{14}\quad a_{15}]$$

$$\mathbf{A}_{21}(3\times 2)=\begin{bmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\\ a_{41} & a_{42}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{22}(3\times 3)=\begin{bmatrix}a_{23} & a_{24} & a_{25}\\ a_{33} & a_{34} & a_{35}\\ a_{43} & a_{44} & a_{45}\end{bmatrix}$$

今考察矩阵 **B**，它与 **A** 是相容的，即 **AB** 是有定义的。矩阵 **B** 必须有五行及任何列数。设想 **B** 分块成

$$\mathbf{B}=\left[\begin{array}{cc} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ \hline b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \\ a_{51} & b_{52} \end{array}\right]$$

用更紧凑的记号，$\mathbf{B}$ 有分块形式

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} \\ \mathbf{B}_{21} \end{bmatrix}$$

和以前一样定义分块矩阵的乘法，即

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} \end{bmatrix}$$

考察分块矩阵的维数的相容性，我们见到 $\mathbf{A}$ 分块成 2×2 而 $\mathbf{B}$ 分成 2×1，故乘积是相容的，即 $\mathbf{A}$ 的分块列数等于 $\mathbf{B}$ 的分块行数。乘积 $\mathbf{AB}$ 是一个分块 2×1 矩阵。可以断定分块矩阵相乘的一般法则是

$$\mathbf{AB}=\left[\sum_{k=1}^{m}\mathbf{A}_{ik}\,\mathbf{B}_{kj}\right]$$

其中 $\mathbf{A}_{ik}$ 是 $\mathbf{A}$ 的一个子块，其维数为 $r_i\times s_k$，而 $\mathbf{B}_{kj}$ 是 $\mathbf{B}$ 的一个子块，其维数为 $s_k\times t_j$。

我们用关于矩阵代数与矩阵转置的一些观察结果来结束本节。例如比较容易看到矩阵和的转置是转置的和，用记号表示，

$$(\mathbf{A}-\mathbf{B})^T=\mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T$$

用元素表示上述关系为

$$\begin{aligned}[a_{ij}+b_{ij}]^T &= [a_{ij}]^T+[b_{ij}]^T \\ &= [a_{ji}]+[b_{ji}]\end{aligned}$$

我们把下列关系的证明作为一个练习留给读者。

$$(\mathbf{AB})^T=\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$$

3.3. 秩与逆

矩阵除法本身是没有意义的。然而矩阵逆的概念实际上允许我们去"除"。在这一节我们要叙述矩阵逆的概念并且要阐明当逆存在时计算逆的一个方法。像我们将要见到的，一个"奇异"矩阵相当于一个标量零，因而奇异矩阵的逆是不存在的①。为了严格地研究矩阵的逆，需要叙述一些另外的概念。

为此，考察矩阵 $\mathbf{A}$，它被分成 n 个列矢量 $\mathbf{C}_1,\mathbf{C}_2,\cdots,\mathbf{C}_n$ 又分成 m 个行矢量 $\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2,\cdots,\mathbf{R}_m$。第 i 个列矢量 $\mathbf{C}_i$ 与第 i 个行矢量 $\mathbf{R}_i$ 是

$$\mathbf{C}_i=\begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix},\mathbf{R}_i=\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$$

由列矢量 $\mathbf{C}_i$ 所产生的矢量空间称为 $\mathbf{A}$ 的列空间，又行矢量 $\mathbf{R}_i$ 所产生的矢量空间称为 $\mathbf{A}$ 的行空间。一个矩阵的行(列)秩定义为它的行(列)空间的维数。因此 $\mathbf{A}$ 的行(列)空间的秩等于 $\mathbf{A}$ 的线性独立的行(列)矢量的个数。行秩等于列秩。我们用 2×4 矩阵

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{bmatrix}$$

来描述它的证明。列矢量是 2 维的，因此列秩不会超过 2。因只有二个行矢量，故行秩不会超过 2。假设 $\mathbf{B}$ 的前两个列是线性独立的，并考察转置

$$\mathbf{B}^T=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \\ b_{13} & b_{23} \\ b_{14} & b_{24} \end{bmatrix}$$

① 一个唯一的逆是不存在的，但是可看例如宾罗斯[1955]的广义逆。

于是得出 B^T 的两个列矢量也是线性独立的。例 3.3-1 更生动地说明这个结论。

例 3.3-1 矩阵

$$C=\begin{bmatrix}1&0&4&5&6\\0&1&1&2&3\end{bmatrix}$$

有列秩 2。前两个列矢量如在第二章所见的是线性独立的。C 的行矢量（或 C^T 的列矢量）的线性独立性可由研究线性关系

$$a\begin{bmatrix}1\\0\\4\\5\\6\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0\\1\\1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

确定。显然 $a=b=0$ 是唯一解，所以 C 的行向量是线性独立的。

矩阵的秩定义为它的列秩与行秩的公共值。如果矩阵的行矢量或列矢量是线性相关的，称此矩阵为奇异的。按照这个定义，例 3.3-1 中的矩阵是奇异的。如果矩阵的行矢量及列矢量都是线性独立的，则此矩阵是非奇(异)的。能够满足上述要求的唯一可能的矩阵是方阵。所以一个非奇矩阵是一个方阵，它的秩等于它的阶。可以断言：一个矩阵如果有一个 r 阶非异子矩阵，但没有阶数大于 r 的非异子矩阵，则此矩阵的秩为 r(见习题 3.11)。

我们假设学生已熟悉行列式的基本理论。矩阵 B 只当它是方阵时才有行列式。B 的行列式记作 $|B|$ 或记作

$$\det B=\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}\cdots b_{1n}\\b_{21}&b_{22}\cdots b_{2n}\\\cdots&\cdots\cdots\\b_{n1}&b_{n2}\cdots b_{nn}\end{vmatrix}$$

如果 n 阶矩阵 B 的秩小于 n，则 B 的行列式为零。换言之，若 B 的行(列)矢量是线性相关的，则其行列式为零。由于这个意义，我们说一个非奇矩阵是一个方阵，其行列式异于零。这就给了我们一

个求矩阵的秩的方法．秩是矩阵中最小非零行列式的阶数．前面的概念可由下面两个例子来说明．

例 3.3-2 在例 3.3-1 中最大子方阵阶数为 2．由前两列组成的矩阵的行列式是

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

故秩为 2。

例 3.3-3 求 λ 的值使三个矢量

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

是线性相关的．我们把行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda - 2$$

等于零．因此若 $\lambda=2$，则这些矢量是线性相关的．

可以证明［Shilov，1961］两个矩阵乘积的秩等于或小于每一个矩阵的秩．即，例如 **AB** 的秩等于或小于 **A** 或 **B** 的秩．

$$\text{rank}\,\mathbf{AB} \leqslant \begin{cases} \text{rank}\ \mathbf{B} \\ \text{rank}\ \mathbf{A} \end{cases} \tag{1}$$

此外，若 **A** 是非奇的，则

$$\text{rank}\ (\mathbf{AB}) = \text{rank}\ \mathbf{B} \tag{2}$$

及

$$\text{rank}(\mathbf{CA}) = \text{rank}\,\mathbf{C} \tag{3}$$

作为上述的推论，可得：若 **A** 与 **B** 二者都是非奇的，则

$$\text{rank}\,(\mathbf{AB}) = \begin{cases} \text{rank}\ \mathbf{B} \\ \text{rank}\ \mathbf{A} \end{cases} \tag{4}$$

这就是说，两个非奇矩阵的乘积是一个非奇矩阵．

若关系式

$$BA=I \tag{5}$$

成立，则矩阵 B 称为是矩阵 A 的左逆，其中 I 是恒等矩阵或单位矩阵。即 I 是一对角形矩阵，主对角线上均为 1，其它处均为零。单位矩阵有性质：对于任何的 A 与 B，IA=A 及 BI=B。若 A 或 B 是方阵，则

$$AI=IA=A$$

$$BI=IB=B$$

假设 B 是矩阵 A 的左逆，又 C 是 A 的右逆，使得

$$BA=AC=I \tag{6}$$

于是 A 称为是可逆的。而有 B=C，且公共的逆记作 $A^{-1}=B=C$；因此若 A^{-1} 是 A 的逆，则有

$$A^{-1}A=AA^{-1}=I \tag{7}$$

其中 I 的行列式是 1。

求矩阵的逆有许多计算方案，我们不能在此一一列出。然而我们要说明计算非奇矩阵之逆的伴随方法［Hildebrand，1958］，如例 3.3-4。也要说明一种特殊形式的矩阵（正交矩阵）的逆如例 3.3-5。

例 3.3-4 矩阵 M 的逆有时用下列表达式来计算：

$$M^{-1}=\frac{M^*}{|M|}$$

M^* 的元素由 M 的代数余子式给出。设 $c_{ij}(i,\ j=1,2,\cdots,n)$ 是 M 的代数余子式，于是

$$M^*=[c_{ij}]^T$$

我们用矩阵

$$M=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 3\end{bmatrix}$$

说明之。代数余子式为

$$c_{11}=\begin{vmatrix}3&4\\4&3\end{vmatrix}=-7\qquad c_{12}=-\begin{vmatrix}1&4\\1&3\end{vmatrix}=1\qquad c_{13}=\begin{vmatrix}1&3\\1&4\end{vmatrix}=1$$

$$c_{21}=-\begin{vmatrix}2&3\\4&3\end{vmatrix}=6\qquad c_{22}=\begin{vmatrix}1&3\\1&3\end{vmatrix}=0\qquad c_{23}=-\begin{vmatrix}1&2\\1&4\end{vmatrix}=-2$$

$$c_{31}=\begin{vmatrix}2&3\\3&4\end{vmatrix}=-1\qquad c_{32}=-\begin{vmatrix}1&3\\1&4\end{vmatrix}=-1\qquad c_{33}=\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}=1$$

故

$$\mathbf{M}^*=\begin{bmatrix}-7&6&-1\\1&0&-1\\1&-2&1\end{bmatrix}$$

今因$|\mathbf{M}|=-2$，故有

$$\mathbf{M}^{-1}=\frac{\mathbf{M}^*}{|\mathbf{M}|}=\begin{bmatrix}\frac{7}{2}&-3&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

我们顺便注意到例 3.3-4 中计算的复杂性使它对四阶或更高阶矩阵将成为不易使用的。若矩阵是 n 阶的，则有 n^2 个 $n-1$ 阶行列式要计算，对大的 n，这是一个繁重的任务。我们也可用分块矩阵来导出计算逆的方法（见习题 3.13）。由于数字计算机的出现，许多旧的新的与特殊形式的反演方案提到面前来了。但是例 3.3-4 的方法对于我们的需要来说将是足够的了。

例 3.3-5 矩阵 $\mathbf{P}$ 及其逆给出如下：

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta\\0&-\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$$

若把 $\mathbf{P}$ 看作是 θ 的函数，可看出 $\mathbf{P}^{-1}(\theta)=\mathbf{P}(-\theta)$。

另一方面，利用三角恒等式，能证明

$$\mathbf{P}(\theta)\mathbf{P}(\beta)=\mathbf{P}(\theta+\beta)$$

因此，若 $\theta=-\beta$，于是有 $\mathbf{P}(\theta)\mathbf{P}(-\theta)=\mathbf{P}(0)=\mathbf{I}$，这就证明了 $\mathbf{P}^{-1}(\theta)=\mathbf{P}(-\theta)$。若$\mathbf{B}(\lambda)$是具有性质$\mathbf{B}^{-1}(\lambda)=\mathbf{B}(-\lambda)$的另一矩阵，则

$$[\mathbf{P}(\theta)\mathbf{B}(\lambda)]^{-1}=\mathbf{B}(-\lambda)\mathbf{P}(-\theta)$$

利用上式的右边容易求得矩阵的逆。另一方面，若利用左边来计算矩阵的逆，则导致相当多的计算。

现在给出关于逆的矩阵运算的一些基本关系。首先叙述容易证明的事实[Murdoch，1957]：若 **A** 与 **B** 均为方阵，则乘积 **AB** 的行列式是各行列式的乘积，即

$$\det(\mathbf{AB})=\det\mathbf{A}\det\mathbf{B} \tag{8}$$

在例 3.3-6 中说明(8) 式。

例 3.3-6 矩阵 **A** 的行列式为零。

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ 2 & 8 & 10\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \det\mathbf{A}=0$$

但矩阵 **B** 的行列式不为零。

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix},\quad \det\mathbf{B}=12$$

乘积矩阵 **AB** 是奇异的。

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}1 & 26 & 28\\ 2 & 52 & 56\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \det(\mathbf{AB})=(\det\mathbf{A})(\det\mathbf{B})=0$$

利用(8)式，从(6)与(7)看出

$$\det(\mathbf{BA})=\det(\mathbf{AC})=\det\mathbf{I}=1$$

$$\det\mathbf{B}\det\mathbf{A}=\det\mathbf{A}\det\mathbf{C}=1$$

及

$$\det(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})=1$$

$$\det\mathbf{A}^{-1}\det\mathbf{A}=1$$

因此，一个矩阵只当它是非奇的，即当 $\det A \neq 0$ 时才有唯一的逆。

从(8)式还可得出：两个非奇矩阵的乘积也是非奇的。此外，若 A 与 B 均为非奇矩阵，则

(i) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (9)

(ii) $(A^{-1})^{-1} = A$ (10)

(iii) $(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}$ (11)

为要证明性质(i)，注意到

$$
\begin{aligned}
(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} \\
&= AA^{-1} = I
\end{aligned}
$$

其它性质都是容易证明的．性质(i)的结果能扩展到更一般的结果：

$$(A_1A_2\cdots A_r)^{-1} = A_r^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1} \tag{12}$$

自然，这里假定矩阵 $A_1, A_2\cdots, A_r$ 都有逆。

3.4. 线性型与线性算子

学生无疑有机会学过多元函数．设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 n 个实变量 x_i 的标量函数．这个函数可认为有一个矢元．这就是说，若矢量 $\mathbf{x}$ 定义为 n 个有序变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，则函数 f 可看作矢元 $\mathbf{x}$ 的函数而写作

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(\mathbf{x})$$

有了这些引导，我们定义线性型为矢元 $\mathbf{u}$ 的标量函数 $f(\mathbf{u})$，它满足线性性质

(i) $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ (可加性)

(ii) $f(\alpha\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x})$ (齐次性)

其中 α 为实常量．作为线性型的一个例子，设 $\mathbf{c}$ 是一个实常矢量，并考察内积 $(\mathbf{c}, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$．此内积满足上述性质，因

$$(\mathbf{c}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) = (\mathbf{c}, \mathbf{x}) + (\mathbf{c}, \mathbf{y})$$

及

$$(\mathbf{c}, \alpha\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{c}, \mathbf{x})$$

要推广上述概念不是太困难的。特别是我们经常使用矢元的矢函数。例如在第四章中，我们用定义一组变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 称为状态变量来描述一个物理系统的性态。列矢量 $x=[x_1 x_2 \cdots x_n]^T$ 称为是这个系统的状态矢量。通过这个矢量 $\mathbf{x}$，我们可用抽象记号

$$\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{F}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \tag{1}$$

来描述一个系统。方程(1)指出 $\mathbf{F}$ 是两个矢元 $\mathbf{x}_k$ 与 $\mathbf{u}_k$ 的矢函数。

习惯上把矢函数说成是由一矢量到另一矢量的变换或映射。经常出现在全书的一个矢函数的例子是由矩阵方程

$$\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k+\mathbf{\Delta}\mathbf{u}_k \tag{2}$$

给出的，其中 $\mathbf{\Phi}$ 是一个 $n\times n$ 非奇矩阵，$\mathbf{\Delta}$ 是一个 $n\times m$ 矩阵。我们将在第八章中详细研究这个方程，这里只是为了说明方程(1)中的记号。

为了说明变换或映射的思想，让我们考察 $\mathbf{u}_k=0$ 的情况。于是有简单的矩阵方程

$$\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k \tag{3}$$

我们说矢量 $\mathbf{x}_k$ 被变换或映射到矢量 $\mathbf{x}_{k+1}$。矩阵 $\mathbf{\Phi}$ 称为变换矩阵或映射矩阵（在以后各章，我们称 $\mathbf{\Phi}$ 为转移矩阵）。

现在导出与矢函数有关的一些更精确的数学概念。为了简化讨论，只考察一个矢元。作为开始，考察矩阵方程

$$\mathbf{y}=\mathbf{C}\mathbf{x} \tag{4}$$

其中 $\mathbf{C}$ 是 $p\times n$ 矩阵。我们可以解释方程(4)是一个从矢量 $\mathbf{x}$ 到矢量 $\mathbf{y}$ 的变换或映射。更明显些，我们考察一个 n 维空间 X，而 $\mathbf{x}$ 在 X 之中，及另一个 p 维空间 Y，而 $\mathbf{y}$ 在 Y 之中。若 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n$ 为 X 的一组基底，又 $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \cdots, \mathbf{h}_p$ 为 Y 的一组基底，则方程(4)的变换是把 X 中的每一个矢量

$$\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{u}_i \tag{5}$$

连系于 Y 中的一个矢量

$$\mathbf{y}=\sum_{i=1}^{p} y_i \mathbf{h}_i \tag{6}$$

方程(4)定义一个算子. 特别是像我们以后将要见到的它定义了一个线性算子。一个算子不严格地说是一种关系，它把一个空间的矢量与另一个空间的矢量联系起来。矩阵 $\mathbf{C}$ 就是方程(4)中的算子，它确切地说出如何由 $\mathbf{x}$ 变换到 $\mathbf{y}$. 如果我们设 $\mathbf{F}$ 是一个算子，它把 $\mathbf{x}$ 映射到 $\mathbf{y}$，可用记号表为 $\mathbf{y}=\mathbf{F}(\mathbf{x})$.

一个矢元的矢函数 $\mathbf{S}(\mathbf{x})$，它满足线性条件：

(i) $\mathbf{S}(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\mathbf{S}(\mathbf{u})+\mathbf{S}(\mathbf{v})$ （可加性） (7)

(ii) $\mathbf{S}(\alpha\mathbf{u})=\alpha\mathbf{S}(\mathbf{u})$ （齐次性） (8)

称为线性算子。方程(2)及(4)的变换，像例 3.4-1 中所说明的，它们都定义线性算子。

例 3.4-1 矩阵方程

$$\mathbf{y}=\mathbf{C}\mathbf{x}$$

满足可加性与齐次性两个性质。因为若 $\mathbf{x}_1$ 与 $\mathbf{x}_2$ 是任二个列矢量，则对任何 α

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)=\mathbf{C}\mathbf{x}_1+\mathbf{C}\mathbf{x}_2$$

及

$$\mathbf{C}(\alpha\mathbf{x})=\alpha\mathbf{C}\mathbf{x}$$

同样，方程(2)显然对 $\mathbf{x}_k$ 与 $\mathbf{u}_k$ 二者是线性的。

我们将证明线性算子与矩阵之间存在一一对应. 由例 3.4-1 清楚地见到矩阵方程满足线性条件(7)与(8)。这就是说矩阵方程是线性算子. 我们想要证明其逆：每一线性算子对应于一矩阵.

考察基矢量 $\mathbf{u}_i$ 在算子 $\mathbf{S}$ 下的映射. 即矢量 $\mathbf{S}\mathbf{u}_i$ 是 Y 中的一个矢量，并能表为基矢量 $\mathbf{h}_i$ 的线性组合

$$\mathbf{S}\mathbf{u}_1 = \sum_{i=1}^{p} s_{i1}\mathbf{h}_i \tag{9}$$

其中 s_{i1} 是矢量 $\mathbf{S}\mathbf{u}_1$ 在 $\mathbf{h}$ 基中的坐标。若 $\mathbf{S}$ 作用在每一个基矢量上，则(9)式一般地为

$$\mathbf{S}\mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^{p} s_{ij}\mathbf{h}_i,\quad j=1,2,\cdots,n \tag{10}$$

若把(10)式两边乘以 x_j($\mathbf{x}$ 在 $\mathbf{u}$ 基中的坐标)并对 j 求和，有

$$\sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{S}\mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^{n} x_j\left(\sum_{i=1}^{p} s_{ij}\mathbf{h}_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} s_{ij}x_j\mathbf{h}_i\right) \tag{11}$$

由线性性质，也有

$$\mathbf{y}=\mathbf{S}\ (\mathbf{x})=\mathbf{S}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{u}_i\right)=\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{S}\mathbf{u}_i=\sum_{i=1}^{p} y_i\mathbf{h}_i \tag{12}$$

其中 y_i 是 $\mathbf{y}$ 在 $\mathbf{h}$ 基中的坐标。

比较(11)与(12)的右边，求得

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} s_{kj}x_j,\qquad k=1,2,\cdots,p \tag{13}$$

方程(13)可简写为矩阵方程

$$\mathbf{y}=\mathbf{S}\mathbf{x} \tag{14}$$

其中 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 分别是 $n\times1$ 与 $p\times1$ 的列矢量，$\mathbf{S}$ 是矩阵 $\mathbf{S}=[s_{ij}]$。这样，我们就建立了，对把 X 中的矢量 $\mathbf{x}$ 映射到 Y 中的矢量 $\mathbf{y}$ 的每一线性算子，都有一个如前所说的矩阵与之相对应，这个矩阵有 p 行 n 列，它的元素依赖于 X 与 Y 的基底。

现在来决定把矢量空间映射到自身上的变换矩阵，即算子 $\mathbf{S}$

把X中的矢量 x 映射到X中的矢量 y。取 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_n$ 为X的基底，如前所述：每一个矢量 $\mathbf{Su}_j$ 可表示为基矢量的线性组合

$$\mathbf{Su}_j=\sum_{k=1}^{n}s_{kj}\mathbf{u}_k \tag{15}$$

由(15)式所定义的矩阵 $\mathbf{S}=[s_{ij}]$称为线性算子关于基 u 的矩阵。(15) 表明 S 的第 j 个列矢量 $\mathbf{S}_j$ 由矢量 $\mathbf{Su}_j$ 的坐标组成。这也清楚地表明线性算子的矩阵 S 依赖于基底。

若我们知道了算子关于基底 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_n$ 的矩阵，则由方程(13)能够决定算子作用于X中的任一矢量 x 的结果。特别是对由方程(15)所定义的矩阵 S，我们可以用矩阵方程

$$\mathbf{y}=\mathbf{Sx}$$

其中 x 与 y 都是 n 维列矢量，其分量 x_i 与 y_i 是 x 与 y 关于基 u 的坐标。

现在我们建立了线性算子与矩阵之间的对应。总之，每一个矩阵对应有一个线性算子。反之，对每一个线性算子对应有一个矩阵。特别是每一个 n 阶矩阵对应把 n 维空间映射到自身的一个线性算子。反之也真。

建立了算子与矩阵之间的对应之后，我们可以自由运用随便那一个概念都是十分方便的。有时用算子比用矩阵更方便，因为用算子时不需要定义基底。像读者已经观察到的，我们对算子与算子的矩阵之间没有记号上的差别。因此 $\mathbf{y}=\mathbf{Ax}$ 可以用作矩阵方程也可用作线性算子方程。假若必须区别的话，只要明白说明所取的观点即可。在下例中可找出线性算子的矩阵。

例 3.4-2 取 n 维空间 $R(n)$的基底为 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_n$。设 x 为 $R(n)$中的任一矢量，即

$$\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\mathbf{u}_i$$

设算子 P 是这样定义的：

$$\mathbf{Px}=\sum_{i=1}^{m} x_i \mathbf{u}_i, \quad m<n$$

这个算子的矩阵，其第 k 列矢量是 $\mathbf{Pu}_k$ 在基 $\mathbf{u}$ 中的坐标，即

$$\mathbf{Px}=\sum_{i=1}^{m} x_i \mathbf{Pu}_i+\sum_{i=m+1}^{n} x_i \mathbf{Pu}_i$$

故

$$\mathbf{Pu}_i=\begin{cases}\mathbf{u}_i, & i=1,2,\cdots,m\\ 0, & i=m+1,\cdots,n\end{cases}$$

$n\times n$ 矩阵 $\mathbf{P}$ 的分块形式是

$$\mathbf{P}=\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{I}(m\times m) & 0\\ \hline 0 & 0\end{array}\right]$$

在建立了算子与矩阵之间的对应之后，现在来建立线性算子的和与积同它们各自的矩阵的和与积之间的对应。设 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 是两个线性算子使得 $\mathbf{A}$(或 $\mathbf{B}$)把 n 维空间 X 的每一个矢量 $\mathbf{x}$ 映射到 X 中的一个矢量 $\mathbf{y}$。(假设 $\mathbf{A}$ 映射 X 到自身只是为了方便。)用式子

$$\mathbf{Cx}=\mathbf{Ax}+\mathbf{Bx}$$

定义算子的和。

设$[a_{ij}]$与$[b_{ij}]$是算子 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 关于基底 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_n$ 的矩阵。于是对每一个基矢量

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{u}_j&=\mathbf{Au}_j+\mathbf{Bu}_j\\ &=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{u}_i+\sum_{i=1}^{n} b_{ij}\mathbf{u}_i\\ &=\sum_{i=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})\mathbf{u}_i\end{aligned}$$

由此得到算子 $\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$ 的矩阵$[c_{ij}]$是由 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的矩阵和给出，即$[c_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}]$。

现在这是十分明显的：矩阵代数与线性算子代数之间存在一一对应。事实上，我们可以继续证明矩阵相乘对应于算子相乘，又用标量乘算子对应于用标量乘矩阵。不必再去证明算子与其矩阵之间的对应，我们就可断言[Shilov，1961]：算子的加法与乘法服从分配律、结合律与交换律，关于矩阵加法与乘法的这些法则已列在§3.2中。其次，关于矩阵的秩、奇异与非奇等概念以及关于矩阵的一般讨论都可转到线性算子上去。

3.5. 基底变换与相似性

我们已经证明n维空间的任一矢量$\mathbf{v}$能够用基矢量$\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_n$唯一表达为

$$\mathbf{v}=\sum_{i=1}^{n}x_i\mathbf{u}_i \tag{1}$$

数x_i称为$\mathbf{v}$在基$\mathbf{u}$中的坐标。并且定义过$\mathbf{v}$的坐标矢量作为一个列矢量。我们现在感兴趣的是矢量$\mathbf{v}$对于另一个基底，比如说是$\mathbf{u}_1^*,\mathbf{u}_2^*,\cdots,\mathbf{u}_n^*$的坐标；以及线性算子在两个不同基底中的矩阵之间的关系。

我们可按式子

$$\mathbf{u}_i^*=\sum_{k=1}^{n}p_{ki}\mathbf{u}_k,\qquad i=1,2,\cdots,n \tag{2}$$

列出基矢量$\mathbf{u}^*$对基矢量$\mathbf{u}$的关系。关系式(2)只是表明每个矢量$\mathbf{u}_i^*$能表为基矢量$\mathbf{u}_k$的线性组合。数$p_{ki}(k=1,2,\cdots,n)$是$\mathbf{u}_i^*$在$\mathbf{u}$基中的坐标。在基$\mathbf{u}^*$中，$\mathbf{v}$有唯一的表达式

$$\mathbf{v}=\sum_{i=1}^{n}x_i^*\mathbf{u}_i^* \tag{3}$$

以(2)代入(3)式，得

$$\mathbf{v}=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}p_{ki}x_i^*\right)\mathbf{u}_k \tag{4}$$

比较(4)与(1)，得关系式

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} p_{ki} x_i^*, \qquad k=1,2,\cdots,n \tag{5}$$

关系式(5)能写成矩阵形式．设 $\mathbf{x}$ 是 $\mathbf{v}$ 在基 $\mathbf{u}$ 中的坐标矢量，而 $\mathbf{x}^*$ 是 $\mathbf{v}$ 在基 $\mathbf{u}^*$ 中的坐标矢量，于是

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x}^* \tag{6}$$

其中 $\mathbf{P}=[p_{ij}]$ 是基底变换矩阵或坐标变换矩阵．可看出由关系式(2)所定义的矩阵是 $\mathbf{P}$ 的转置．留给读者去验证 $\mathbf{P}$ 是非奇的．例 3.5-1 说明基矢量的变换．

例 3.5-1 考察由旋转坐标轴引起的坐标的变换（基底的变换），如图 3.5-1 所示绕 $\mathbf{e}_1$ 轴旋转角 θ．利用(2)，并注意到 $\|\mathbf{e}_i\|=1$，可写出

$$\mathbf{e}_1^* = \mathbf{e}_1$$
$$\mathbf{e}_2^* = \cos\theta\,\mathbf{e}_2 + \sin\theta\,\mathbf{e}_3$$
$$\mathbf{e}_3^* = -\sin\theta\,\mathbf{e}_2 + \cos\theta\,\mathbf{e}_3$$

故基底变换矩阵 $\mathbf{P}$ 为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

也见于例 3.3-5．

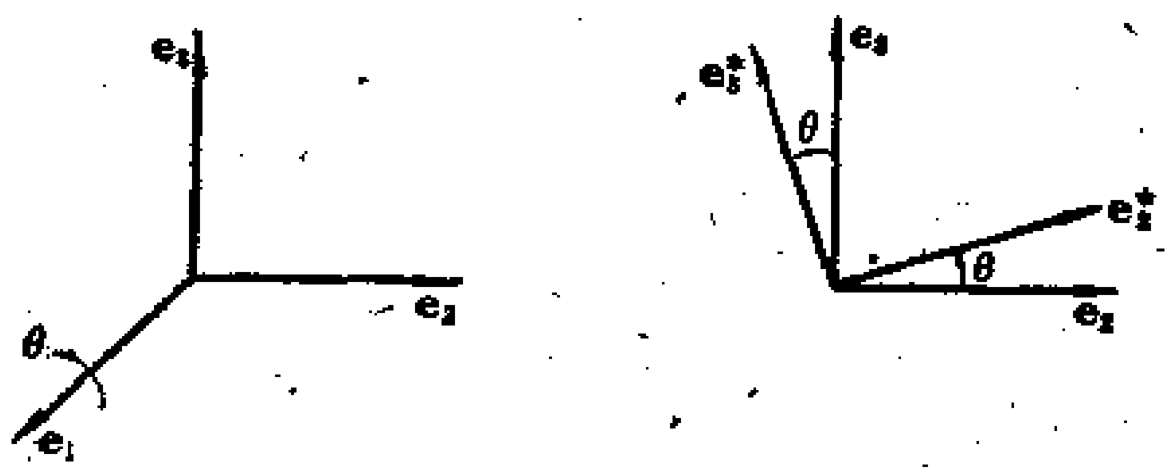


图 3.5-1 三维空间中正交基矢量的旋转（基底变换）．

(6) 式指出矢量的坐标在两个不同基底中的关系．现在研究线性算子在两个不同基底中的矩阵．为此目的，设 $\mathbf{A}$ 为线性算子

在基 u 中的矩阵．因此我们有矩阵方程

$$\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{x} \tag{7}$$

其中 x 与 y 是在 u 基中的坐标矢量．其次，在基 $\mathbf{u}^*$ 中，对应于同一算子的矩阵方程为

$$\mathbf{y}^*=\mathbf{A}^*\mathbf{x}^* \tag{8}$$

坐标矢量 y 与 $\mathbf{y}^*$ 之间的关系为

$$\mathbf{y}=\mathbf{P}\mathbf{y}^*$$

或

$$\mathbf{y}^*=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{y}$$

先利用(7)，再利用(6)，即见

$$\mathbf{y}^*=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}^*$$

把此方程与方程(8)比较之，得

$$\mathbf{A}^*=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} \tag{9}$$

(9)式指出如果线性算子在第一个基底(u)中的矩阵已知又坐标变换矩阵 P 也已知，如何确定此线性算子在第二个基底($\mathbf{u}^*$)中的矩阵．由关系式 (9) 所联系的两个矩阵称为是相似的．这样我们得知对应于同一线性算子的矩阵是相似的．

容易证明相似矩阵有相等的行列式．设 B 相似于 A，则

$$\begin{aligned}\det \mathbf{B}&=\det(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})\\&=\det \mathbf{T}^{-1}\det \mathbf{A}\det \mathbf{T}\\&=\det \mathbf{A}\end{aligned}$$

其中 T 是坐标变换矩阵．这就表明一个算子的“行列式”与用来定义算子矩阵的基底无关．在我们的一些研究中，有机会使用这样的矩阵；它是与对角形矩阵相似的．一个矩阵 A 与对角形矩阵相似，是指存在一个矩阵 T 使得

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}=\mathrm{diag}[d_1,d_2,\cdots,d_n] \tag{10}$$

在 §3.8，我们要叙述求 T 的一个方法．例 3.5-2 给出的矩阵与对角形矩阵相似．

例 3.5-2 读者容易验证矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

相似于对角形矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

其中

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 及 } \mathbf{T}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.6. 伴随算子

伴随线性算子定义在 n 维酉空间中。这就允许我们不仅去表达一般的结果而且引进元素在复域中的矩阵。设 **A** 是 n 维酉空间 $C(n)$ 中的一个线性算子，并考察 $C(n)$ 中任两个矢量 **x** 与 **y**。伴随算子正式定义如下：

定义 3.6-1 算子 $\mathbf{A}^*$ 称为对算子 **A** 是伴随的，如果

$$(\mathbf{Ax},\mathbf{y})=(\mathbf{x},\mathbf{A}^*\mathbf{y}) \tag{1}$$

算子 **A** 的矩阵与伴随算子 $\mathbf{A}^*$ 的矩阵之间的对应是容易建立的。设算子 **A** 在某一标准正交基底 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n$ 中有矩阵 $[a_{ij}]$。按(3.4-15)，可写出

$$\mathbf{Ae}_j=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}\mathbf{e}_k,\quad j=1,2,\cdots,n \tag{2}$$

矩阵元素 a_{ij} 可由 $\mathbf{e}_i$ 与(2)中的矢量的内积得出。特别是有

$$(\mathbf{Ae}_j,\mathbf{e}_i)=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}(\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_i)$$

$$=a_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots,n \tag{3}$$

今设伴随算子 $\mathbf{A}^*$ 在同一基底中有矩阵$[a_{ij}^*]$。即矩阵$[a_{ij}^*]$的列矢量是由 $\mathbf{A}^*\mathbf{e}_1,\mathbf{A}^*\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{A}^*\mathbf{e}_n$ 的坐标矢量构成的，故

$$\mathbf{A}^*\mathbf{e}_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}^*\mathbf{e}_k \tag{4}$$

如上进行，求得

$$\begin{aligned}(\mathbf{e}_j,\mathbf{A}^*\mathbf{e}_i)&=\sum_{k=1}^{n}(\mathbf{e}_j,a_{ki}^*\mathbf{e}_k)\\&=\sum_{k=1}^{n}\overline{a}_{ki}^*(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k)\\&=\overline{a}_{ji}^*\end{aligned} \tag{5}$$

比较(3)与(5)，并注意到(1)，看出

$$a_{ij}=\overline{a}_{ji}^*$$

因此算子 $\mathbf{A}^*$ 的矩阵是算子 $\mathbf{A}$ 的矩阵的复共轭转置。换言之，若 $\mathbf{A}=[a_{ij}]$是算子 $\mathbf{A}$ 的矩阵，又 $\mathbf{A}^*=[a_{ij}^*]$ 是伴随算子 $\mathbf{A}^*$ 的矩阵，则

$$\overline{\mathbf{A}}^T=\mathbf{A}^* \tag{6}$$

由 (6) 式定义的矩阵 $\mathbf{A}^*$ 是 $\mathbf{A}$ 的复共轭转置，并且称为是矩阵 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵。这样，我们就建立了对应：在标准正交基底中，伴随矩阵对应于伴随算子。

正规线性算子(矩阵)被定义为一个算子，它与它的伴随算子是可交换的，即 $\mathbf{AA}^*=\mathbf{A}^*\mathbf{A}$。一个线性算子（或矩阵）当 $\mathbf{H}^*=\mathbf{H}$，称为厄米特算子；当 $\mathbf{UU}^*=\mathbf{U}^*\mathbf{U}=\mathbf{I}$，称为酉算子。对实矩阵，有 $\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^T$。一个实矩阵当 $\mathbf{A}^T=\mathbf{A}^*=\mathbf{A}$，称为对称的(自伴随的)；当 $\mathbf{AA}^*=\mathbf{AA}^T=\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{I}$；称为正交的。一个线性算子 $\mathbf{K}$ 当 $\mathbf{K}^T=-\mathbf{K}$ 称为斜对称的。

例 3.6-1 在 n 维欧氏空间 $R(n)$中，一个正交算子保持空间的度量。设 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 为$R(n)$中的矢量，又 $\mathbf{P}$ 是一个正交算子，则

$$(\mathbf{Px},\mathbf{Py})=(\mathbf{x},\mathbf{P}^*\mathbf{Py})$$

$$=(\mathbf{x},\mathbf{P}^T\mathbf{P}\mathbf{y})$$
$$=(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

保持空间度量的算子称为等距算子。在例 3.3-5 中讨论过的矩阵是一个正交算子的矩阵。(也可见于例 3.5-1 中的矩阵及其物理解释.)从而,这个矩阵称为是正交的。在酉空间中,酉算子是等距的,因为

$$(\mathbf{U}\mathbf{x},\mathbf{U}\mathbf{y})=(\mathbf{x},\mathbf{U}^*\mathbf{U}\mathbf{y})$$
$$=(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

3.7. 值域与零空间

设 $\mathbf{W}$ 是一个线性算子,它把 n 维矢量空间 X 映射到 m 维矢量空间 Y。设 $\mathbf{x}$ 在 X 中 $\mathbf{y}$ 在 Y 中,形如 $\mathbf{y}=\mathbf{W}\mathbf{x}$ 的一切矢量的集合是一个矢量空间,它称为是 $\mathbf{W}$ 的值域空间。记这个空间为 $R(\mathbf{W})$,我们看到它是 Y 的一个子空间。空间 $R(\mathbf{W})$ 是在映射 $\mathbf{W}$ 下空间 X 的像。

$\mathbf{W}$ 的零空间也是一个矢量空间,它是由使得 $\mathbf{W}\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的 X 中的一切 $\mathbf{x}$ 构成的。因此零空间(记作 $N(\mathbf{W})$)是在 X 中一切由 $\mathbf{W}$ 映射到零矢量的矢量 $\mathbf{x}$ 的集合。下面例子说明一个矢量可以属于值域空间也可以属于零空间。

例 3.7-1 设 $\mathbf{A}$ 是一个线性算子的矩阵,

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

考察 X 中的列矢量 $\mathbf{x}=[0\quad x_2]^T$,于是

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_2\\ 0\end{bmatrix}=\mathbf{y}$$

故 $\mathbf{A}$ 把 $\mathbf{x}$ 映射为 $\mathbf{y}$,且 $\mathbf{y}$ 在 $R(\mathbf{A})$ 中。矢量 $\mathbf{y}$ 也在 $N(\mathbf{A})$ 中,因为

$$\mathbf{A}\mathbf{y}=\mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{x})=\mathbf{A}^2\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

线性算子 $\mathbf{W}$ 的秩定义为 $R(\mathbf{W})$ 的维数。$N(\mathbf{W})$ 的维数称为 W

的亏量或零度．由于算子与矩阵之间的对应，从而得到，一个算子的秩和它的矩阵 $\mathbf{W}$ 的秩相同，这个矩阵定义在 X 中的任意基底 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_n$ 上及 Y 中的任意基底 $\mathbf{h}_1,\mathbf{h}_2,\cdots,\mathbf{h}_m$ 上．这就是说，如前所讨论过的，矩阵 $\mathbf{W}$ 的列由坐标矢量 $\mathbf{Wu}_1,\mathbf{Wu}_2,\cdots,\mathbf{Wu}_n$ 构成．另一方面，

$$\mathbf{y}=\mathbf{Wx}=\mathbf{W}\sum_{i=1}^{n}x_i\mathbf{u}_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_i\mathbf{Wu}_i \tag{1}$$

这说明 $R(\mathbf{W})$ 的维数等于 $\mathbf{Wu}_1,\mathbf{Wu}_2,\cdots,\mathbf{Wu}_n$ 中线性独立矢量的最大个数．

今考察把 n 维空间映射到自身的算子．如我们已看到的，这样的算子与 $n\times n$ 矩阵之间存在一一对应．若算子的行列式不为零，这个算子称为非奇的，它与前述的非奇矩阵的定义是一致的．我们断言［Gantmacher, 1959］对于一个奇异算子，在 X 中总存在一个 $\mathbf{x}$，使得 $\mathbf{Wx}=\mathbf{0}$，并且 $\mathbf{W}$ 的值域是 X 的一个真子空间．若 $\mathbf{W}$ 是非奇的，则由 $\mathbf{Wx}=\mathbf{0}$ 得出 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 且 $\mathbf{W}$ 的值域是整个空间 X．在第九章特别在 § 9.5，我们要把一个矩阵或一个线性算子分解成它的值域与零空间．实现这样的分解要用到下面的定理．

定理 3.7-1 设 $\mathbf{W}$ 是 $C(n)$ 中的线性算子，则有

(i) $R(\mathbf{W})^{\perp}=N(\mathbf{W}^*)$

(ii) $C(n)=R(\mathbf{W})\oplus N(\mathbf{W}^*)$

(iii) $\dim R(\mathbf{W})+\dim N(\mathbf{W}^*)=n$

(iv) $\dim R(\mathbf{W})=\dim R(\mathbf{W}^*)$

(v) $\dim N(\mathbf{W})=\dim N(\mathbf{W}^*)$

为要证明论断(i)，首先在 $R(\mathbf{W})^{\perp}$ 取任一 $\mathbf{z}$，并证明由此推出 $\mathbf{z}$ 也在 $N(\mathbf{W}^*)$ 之中．令 $\mathbf{v}=\mathbf{W}(\mathbf{W}^*\mathbf{z})$ 在 $R(\mathbf{W})$ 之中．因为 $\mathbf{z}$ 在

$R(\mathbf{W})^{\perp}$之中，而 v 在 $R(\mathbf{W})$之中，故$(\mathbf{z},\mathbf{v})=0$。于是有

$$(\mathbf{z},\mathbf{v})=(\mathbf{z},\mathbf{W}\mathbf{W}^*\mathbf{z})$$
$$=(\mathbf{W}^*\mathbf{z},\mathbf{W}^*\mathbf{z})=\|\mathbf{W}^*\mathbf{z}\|^2=0$$

由此有 $\mathbf{W}^*\mathbf{z}=0$，故 z 在 $N(\mathbf{W}^*)$ 之中．其次假设 z 在 $N(\mathbf{W}^*)$之中，由此要证明 z 也在 $R(\mathbf{W})^{\perp}$ 之中．若 z 在 $N(\mathbf{W}^*)$ 之中，则对一切 y 有

$$(\mathbf{W}^*\mathbf{z},\mathbf{y})=(\mathbf{z},\mathbf{W}\mathbf{y})=0$$

从此得出 z 正交于 $R(\mathbf{W})$，即 z 在 $R(\mathbf{W})^{\perp}$ 之中。

论断(ii)可由(i)直接得出，因为

$$C(n)=R(\mathbf{W})\oplus R(\mathbf{W})^{\perp}$$

论断(iii)也可从(ii)直接得出，这已在§2.10 中讨论过．为要证明论断(iv)，设 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_n$ 为 $C(n)$的一个基底，根据(1)式使得

$$\mathbf{y}=\mathbf{W}\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{r}x_i(\mathbf{W}\mathbf{u}_i)$$

这就是说，前 r 个矢量 $\mathbf{W}\mathbf{u}_1,\mathbf{W}\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{W}\mathbf{u}_r$ 生成 $R(\mathbf{W})$．由此便可得到 $\dim R(\mathbf{W})\leqslant n-\dim N(\mathbf{W})$。根据同样理由，也有不等式 $\dim R(\mathbf{W}^*)\leqslant n-\dim N(\mathbf{W}^*)$。所以利用(iii)，可得

$$\dim R(\mathbf{W}^*)\leqslant\dim R(\mathbf{W})$$

因为同一不等式也可用于 $\mathbf{W}^*$，即

$$\dim R(\mathbf{W})\leqslant\dim R(\mathbf{W}^*)$$

得到 $\dim R(\mathbf{W})=\dim R(\mathbf{W}^*)$。由于得到这个结论 利用(iv)导出

$$\dim N(\mathbf{W})=\dim N(\mathbf{W}^*)$$

3.8. 特征矢量与不变子空间

一个子空间M称为在线性变换 A 下是不变的，如果 x 在 M 中，且 Ax 也在M中．换言之，如果 x 在M中就意味着 Ax 也在M

中，则M在$\mathbf{A}$下是不变的。下面的例子说明这个思想。

例 3.8-1 在例3.4-2讨论过算子$\mathbf{P}$的两个不变子空间P'及P''。子空间P'是一切矢量的集合：

$$\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{m} x_i\mathbf{u}_i \quad 对\ \mathbf{x}\ 在\ P'\ 中$$

而子空间P''是一切矢量的集合：

$$\mathbf{y}=\sum_{i=m+1}^{n} x_i\mathbf{u}_i \quad 对\ \mathbf{y}\ 对 P''中$$

注意到对P'中的$\mathbf{x}$，

$$\mathbf{Px}=\mathbf{x}$$

故P'是不变的。又对P''中的$\mathbf{y}$

$$\mathbf{Py}=0$$

故P''是不变的。

例 3.8-2 设$M^{\perp}$为M的正交补空间，于是整个空间V是直和

$$V=M^{\perp}\oplus M$$

V中任一矢量$\mathbf{z}$有唯一表达式

$$\mathbf{z}=\mathbf{x}+\mathbf{y}$$

其中$\mathbf{x}$在M中，而$\mathbf{y}$在$M^{\perp}$中。我们断言：如果M关于线性算子$\mathbf{A}$是不变的，则$M^{\perp}$关于$\mathbf{A}^*$是不变的。因为如果$\mathbf{x}$含于M中，则$\mathbf{Ax}$也含于M中，故$(\mathbf{Ax},\mathbf{y})=0$。又

$$(\mathbf{Ax},\mathbf{y})=(\mathbf{x},\mathbf{A}^*\mathbf{y})=0$$

故$\mathbf{A}^*\mathbf{y}$是在$M^{\perp}$中，因为$\mathbf{x}$是M中的任一矢量。

线性算子的一维不变子空间在分析中起着重要的作用。这些不变子空间(或方向)有助于区分线性算子(或线性算子的矩阵)的结构。为求一维不变子空间，我们寻找一个矢量$\mathbf{x}$使得

$$\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{x} \tag{1}$$

其中λ是一个标量。满足方程(1)的非零矢量$\mathbf{x}$称为算子(或矩阵)的特征矢量。标量λ称为对应于特征矢量$\mathbf{x}$的特征值(或特征根等等)。

为求特征值与特征矢量，我们考察方程(1)。若将方程(1)的右方移向左方，就有一个 n 个未知量即 x_i 的 n 个方程的线性齐次方程组。所得方程组

$$\mathbf{A}\mathbf{x}-\lambda\mathbf{x}=(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x} \tag{2}$$

的行列式是 λ 的 n 次多项式。更明白些，我们有一般的结果

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(-\lambda)^n+\beta_1(-\lambda)^{n-1}+\cdots+\beta_{n-1}(-\lambda)+\beta_n \tag{3}$$

下面的例子提供一个数值问题。

例 3.8-3 矩阵

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & -3 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & -2 \\ -1 & 3 & -\lambda \end{bmatrix}$$

的行列式是多项式 $\phi(\lambda)=-\lambda^3+2\lambda^2-6\lambda-4$。

现在我们说明(3)式中系数 β_i 与 $\mathbf{A}$ 的元素之间的关系。例如系数 β_1 是 $\mathbf{A}$ 的对角线元素之和，即 $\mathbf{A}$ 的迹。

$$\text{trace } \mathbf{A}=\beta_1=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

在多项式 $\phi(\lambda)$ 中最后的系数 β_n 是矩阵的行列式，即 $\beta_n=\det \mathbf{A}$。一般，β_i 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的 i 阶主子式的和。为了说明这一点，考察例 3.8-3 中的多项式。我们有 $\beta_1=2$。有三个二阶主子式：

$$\beta_2=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=+6$$

三阶主子式就是行列式 $\beta_3=-4$。

现在考察一个一般的线性算子，它的矩阵在某一基底 $\mathbf{u}$ 中是

$$\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I} \tag{4}$$

设 $\mathbf{P}$ 是从基 $\mathbf{u}$ 到某个基 $\mathbf{f}$ 的坐标变换矩阵。于是在基 $\mathbf{f}$ 中算子的矩阵是

$$\mathbf{P}^{-1}[\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}]\mathbf{P}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}-\lambda\mathbf{I} \tag{5}$$

在§3.5中我们已证明过一个算子的行列式与基底的选择无关。因此

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=|\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}-\lambda\mathbf{I}|=\phi(\lambda) \tag{6}$$

(6)式说明一个算子的多项式 $\phi(\lambda)$ 与基底选择无关。多项式 $\phi(\lambda)$ 称为线性算子或对应矩阵的特征多项式。

如上所见，行列式

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=\phi(\lambda) \tag{7}$$

是一个 λ 的 n 次多项式。线性算子的每一个特征值 λ 是特征多项式 $\phi(\lambda)$ 的一个根。若 λ 是复域中的标量，多项式有 n 个根，当然没有必要都是相异的。若这些根是相异的我们称它们为单根，相反称为重根。例如多项式

$$\phi(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^3$$

有一个单根 $\lambda=1$ 及一个重根 $\lambda=2$。

现在只对于简单的线性算子来说明特征值与连带的特征矢量的含义。一个线性算子 $\mathbf{B}$(或其矩阵)在 n 维空间 $C(n)$ 中如果有 n 个线性独立的特征矢量，则称此算子是简单结构的。

设 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_n$ 是 $C(n)$ 的一组基底，使得这些矢量是线性算子 $\mathbf{B}$ 的特征矢量。

$$\mathbf{B}\mathbf{u}_i=\lambda_i\mathbf{u}_i \quad i=1,2,\cdots,n \tag{8}$$

其中每一个根分别由下标标出。于是对 $C(n)$ 中任一矢量 $\mathbf{x}$：

$$\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\mathbf{u}_i$$

有

$$\mathbf{B}\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\mathbf{B}\mathbf{u}_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n} x_i\lambda_i\mathbf{u}_i \qquad (9)$$

如(9)式所指出的算子 **B** 的作用描绘于图 3.8-1 中。如图所示，算子 **B** 把 **x** 的在基 **u** 中的坐标 x_i 简单地扩大了。现在用例 3.8-4 说明前面的某些概念。

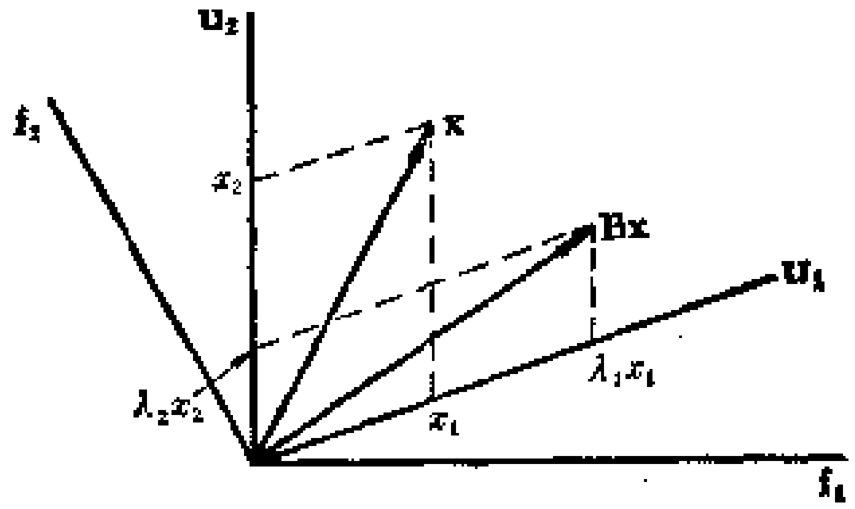


图 3.8-1 线性算子 **B** 把矢量 **x** 映射到矢量 **Bx** 的图示.

例 3.8-4 矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

有特征多项式

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2$$

A 的特征矢量由齐次方程组

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}=\begin{cases}(1-\lambda)x_1+x_2=0\\ (1-\lambda)x_2=0\end{cases}\qquad \lambda=1$$

决定。此方程组的唯一非零解是

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}c\\ 0\end{bmatrix}$$

其中 c 是一任意常量。因为 **A** 只有一个线性独立的特征矢量，所以它不是简单结构的。今考察矩阵

$$\mathbf{I}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

它有同样的特征多项式

$$\phi(\lambda)=(1-\lambda)^2$$

特征矢量如前一样由解方程组

$$(1-\lambda)x_1=0$$

$$(1-\lambda)x_2=0, \quad \lambda=1$$

求得。显然

$$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}c_1\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}0\\c_2\end{bmatrix}$$

是特征矢量并且是线性独立的。所以 I 是简单结构的。

3.9. 对角形化

现在来证明：如果一个矩阵是简单结构的，则它与一个对角形矩阵是相似的。同时，要导出一个方法用来决定一个适当的矩阵 T，它把所给矩阵转化为对角形矩阵。

设 S 是简单结构的，故它有 n 个线性独立的特征矢量。我们有

$$\mathbf{S}\mathbf{u}_i=\lambda_i\mathbf{u}_i, \quad i=1,2,\cdots,n \tag{1}$$

定义一个 $n\times n$ 分块矩阵

$$\mathbf{T}=[\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \cdots \ \mathbf{u}_n] \tag{2}$$

于是可以把(1)式写成

$$\mathbf{ST}=\mathbf{TD} \tag{3}$$

其中 $\mathbf{D}=\mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]$。今 $\mathbf{T}^{-1}$ 存在，故

$$\mathbf{D}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{ST} \tag{4}$$

这就证明了 S 相似于对角形矩阵。

(2)式告诉我们为要把一矩阵化为对角形如何去求 T。下面的例子充分说明这个思想。

例 3.9-1 考察对称矩阵

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix}25 & 0 & 0\\0 & 34 & -12\\0 & -12 & 41\end{bmatrix}$$

这个矩阵相似于一个对角形矩阵，我们需要求一个矩阵 T，使得 $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{ST}$ 是对角形。特征多项式是

$$|\mathbf{S}-\lambda\mathbf{I}|=(25-\lambda)(\lambda^2-75\lambda+1250)$$

故 $\lambda_1=\lambda_2=25$，又 $\lambda_3=50$. 解方程

$$(\mathbf{S}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}=0 \tag{5}$$

当 $\lambda=25$，得到矢量 $\mathbf{u}_1=\left[c_1 \quad c_2 \quad \frac{3}{4}c_2\right]^T$；其中 c_1 与 c_2 是任意常量。我们取 $c_1=1$ 及 $c_2=0$，于是 $\mathbf{u}_1=[1 \quad 0 \quad 0]^T$ 是一个特征矢量. 此外，若取 $c_1=0$ 及 $c_2=1$，于是 $\mathbf{u}_2=\left[0 \quad 1 \quad \frac{3}{4}\right]^T$ 是另一个特征矢量。对应于特征值 $\lambda=25$，已求得两个线性独立的特征矢量 $\mathbf{u}_1$ 与 $\mathbf{u}_2$。事实上，$\mathbf{u}_1$ 与 $\mathbf{u}_2$ 是正交的。今设 $\lambda_3=50$ 来解方程(5)，求得 $\mathbf{u}_3=k\left[0 \quad -\frac{3}{4} \quad 1\right]^T$ 是对应于 $\lambda_3=50$ 的特征矢量。注意到 k 是一个任意标量，它指出如果 $\mathbf{u}$ 是一个特征矢量，则对任一标量 k，$k\mathbf{u}$ 也是特征矢量。注意到此，让我们把 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$ 与 $\mathbf{u}_3$ 标准化. 即把 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$ 与 $\mathbf{u}_3$ 化为单位长并记为 $\mathbf{T}_1,\mathbf{T}_2,\mathbf{T}_3$。故有三个特征矢量

$$\mathbf{T}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{T}_2=\begin{bmatrix}0\\\frac{4}{5}\\\frac{3}{5}\end{bmatrix},\quad \mathbf{T}_3=\begin{bmatrix}0\\-\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{bmatrix} \tag{6}$$

所求的矩阵 $\mathbf{T}$ 是

$$\mathbf{T}=[\mathbf{T}_1 \quad \mathbf{T}_2 \quad \mathbf{T}_3] \tag{7}$$

注意到 $\mathbf{T}$ 是一个正交矩阵。

在例 3.9-1 中可以发现实对称矩阵的一些有趣的性质. 虽然不想花时间去证明它们[Murdoch,1957]，但把以后章节中有用的一些定理列出如下.(也可参看习题 3-31 到 3-33.)

定理 3.9-1 实对称矩阵相似于对角形矩阵。

定理 3.9-2 实对称矩阵有 n 个互相正交的特征矢量.

定理 3.9-3 如果 $\mathbf{A}$ 为一实对称矩阵，则存在正交矩阵 $\mathbf{P}$ 使得 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ 是对角形矩阵。

在第九章我们要谈到相异系统. 它们称为是相异的是因为用以描写它们的矩阵有相异特征值. 我们将证明下列定理以备以后

引用。

定理 3.9-4 如果矩阵 A 的特征值是相异的，则它相似于一个对角形矩阵。

我们已从例 3.9-1 观察到如果矩阵的特征值不是相异的，这个矩阵也可以相似于对角形矩阵。为要证明相异特征值的条件是充分的，我们考察

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i=\lambda_i\mathbf{x}_i,\quad \mathbf{x}_i\neq\mathbf{0}$$

且 $\lambda_i\neq\lambda_j$ 对 $i\neq j$。为要证明 $\mathbf{x}_i$ 是线性独立的，我们考察线性关系

$$\sum_{i=1}^{n}c_i\mathbf{x}_i=\mathbf{0} \tag{8}$$

其中 c_i 是常数。今定义矩阵

$$\mathbf{M}(\mathbf{A})=(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\cdots(\mathbf{A}-\lambda_{i-1}\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_{i+1}\mathbf{I})\cdots(\mathbf{A}-\lambda_n\mathbf{I}) \tag{9}$$

用(9)式乘关系式(8)，得

$$c_i\mathbf{M}(\mathbf{A})\mathbf{x}_i=\mathbf{0} \tag{10}$$

但读者容易验证

$$\mathbf{M}(\mathbf{A})\mathbf{x}_i=\mathbf{M}(\lambda_i)\mathbf{x}_i \tag{11}$$

故(10)式成为

$$c_i\mathbf{M}(\lambda_i)\mathbf{x}_i=\mathbf{0}$$

由于相异根的假定，$\mathbf{M}(\lambda_i)\neq\mathbf{0}$，得到 $c_i=0$。因此特征矢量 $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_n$ 是线性独立的并且断定矩阵是简单结构的。

到现在为止，只研究了简单结构的矩阵。我们将有机会用到其它的相似变换。在例 3.8-4 中我们说明了并非一切矩阵都相似于对角形矩阵。然而每一个矩阵都相似于约当矩阵［Gantmacher.1959］。我们将在第四章讨论这样形式的矩阵，在那里第一次要用到它。

3.10. 矩阵函数

我们将不给矩阵函数一个明确的与严格的定义。[Gantmacher, 1959]。也不去考察所有在全书中可能有机会用到的矩阵函数。在这一节只介绍基本概念及几个例子，目的只是暂时使读者熟悉一下这个思想。

从定义矩阵的幂开始讨论。乘法结合律允许我们去定义矩阵(或线性算子)的幂，只要矩阵是方阵。利用结合律，我们定义

$$\mathbf{A}^0 \triangleq \mathbf{I}$$

$$\mathbf{A}^1 \triangleq \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A} \triangleq \mathbf{A}^2$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{A}) \triangleq \mathbf{A}\mathbf{A}^2 \triangleq \mathbf{A}^2\mathbf{A} \triangleq \mathbf{A}^3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathbf{A}^n \triangleq \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{A} \triangleq \mathbf{A}\mathbf{A}^{n-1}$$

$$\mathbf{A}^{m+n} \triangleq \mathbf{A}^m\mathbf{A}^n$$

算子多项式定义为

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}) \triangleq \beta_0\mathbf{A}^m + \beta_1\mathbf{A}^{m-1} + \cdots + \beta_m\mathbf{I}$$

更一般些，如果 $f(t)$ 是标量自变量 t 的任一多项式，则多项式 $\mathbf{f}(\mathbf{A})$ 是由 $\mathbf{A}$ 代替多项式中的 t 而得到的。当 $\mathbf{A}$ 是一个算子的矩阵，我们也用 $\mathbf{P}(\mathbf{A})$ 及 $\mathbf{f}(\mathbf{A})$ 来表示对应的矩阵多项式。

例 3.10-1 矩阵指数函数用无穷级数

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^i}{i!}$$

定义。设

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因为 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{0}$，立即有

$$e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

标量自变量 t 的标量多项式 $f(t)$ 称为方阵 **A** 的零化多项式，若有

$$\mathbf{f}(\mathbf{A})=\mathbf{0}$$

我们不证明而指出特征多项式

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=\phi(\lambda)$$

是 **A** 的一个零化多项式. 这个结论通常称为凯莱-哈密尔顿定理，它指出了每一个方阵满足它的特征方程.

在例 3.8-4 中，**A** 的特征多项式是

$$\phi(\lambda)=\lambda^2-2\lambda+1$$

故

$$\phi(A)=\mathbf{A}^2-2\mathbf{A}+\mathbf{I}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}-2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

设想 n 阶矩阵满足它的特征多项式

$$\mathbf{A}^n+a_1\mathbf{A}^{n-1}+\cdots+a_n\mathbf{I}=0 \tag{1}$$

因此

$$\mathbf{A}^n=-\sum_{i=0}^{n-1}a_{n-i}\mathbf{A}^i \tag{2}$$

从关系式(2)，可得出：对任一 $m\geqslant n$，有

$$\mathbf{A}^m=\sum_{i=0}^{n-1}v_i\mathbf{A}^i \tag{3}$$

具有最低次数并且最高项系数为 1 的矩阵 **A** 的零化多项式称为矩阵 **A** 的最小多项式. 我们在下面例子中举几个矩阵来说明这个概念.

例 3.10-2 考察三个矩阵

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

它们全有特征多项式 $\phi(\lambda)=(2-\lambda)^3$。第一个矩阵的最小多项式是 $\psi_1(\lambda)=(2-\lambda)^3$，第二个矩阵的最小多项式是 $\psi_2(\lambda)=(2-\lambda)^2$，而第三个矩阵的最小多项式是 $\psi_3(\lambda)=2-\lambda$。

3.11. 二次型

设 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 分别是 $n\times1$ 与 $m\times1$ 的列矢量，又 $\mathbf{A}$ 是一个实的 $n\times m$ 矩阵。标量函数

$$f=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y} \tag{1}$$

称为是一个双线性型。若 $\mathbf{y}=\mathbf{x}$，又 $\mathbf{A}$ 是一个方阵，则标量函数

$$Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \tag{2}$$

称为二次型。也可用更一般的记号

$$f=(\mathbf{x},\mathbf{A}\mathbf{y}) \tag{3}$$

它已在§ 3.6 中讨论过。(3) 式也可用于复域中的矢量与矩阵。当 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 是复列矢量，我们有等价的表达式

$$(\mathbf{x},\mathbf{A}\mathbf{y})=\bar{\mathbf{x}}^T\mathbf{A}\mathbf{y}$$

$$(\mathbf{B}\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{x},\mathbf{B}^*\mathbf{y})=\bar{\mathbf{x}}^T\bar{\mathbf{B}}^T\mathbf{y}$$

经常用于实二次函数的另一个记号是

$$(\mathbf{x},\mathbf{A}\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}=\|\mathbf{x}\|_A^2 \tag{4}$$

其中 $\mathbf{A}$ 是一个实对称矩阵。一个实的二次型经常有这个表达式 [Bellman, 1960]。这就是说，一个二次型 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 经常能写成 $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$，其中 $\mathbf{A}=\mathbf{A}^T$。我们以下列例子说明之。

例 3.11-1 二次函数

$$Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+2x_1x_3-4x_1x_2-6x_2x_3$$

能写成 $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$，其中 $\mathbf{A}$ 是一个对称矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

二次型的秩定义为矩阵 **A** 的秩．按照 **A** 是奇异或非奇的把二次型称为奇异或非奇的．我们只考察实二次型，故矩阵 **A** 的元素是实的，矢量 **x** 也是实的．所以一个实二次型是 n 个实变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的实函数．

现在讨论在坐标变换下系数矩阵是如何变化的．设 **P** 为一非奇矩阵，并考虑变换

$$\mathbf{x}=\mathbf{P}\mathbf{y} \tag{5}$$

有

$$\begin{aligned}(\mathbf{x},\mathbf{A}\mathbf{x})&=(\mathbf{P}\mathbf{y},\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{y})\\ &=(\mathbf{y},\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{y})\end{aligned} \tag{6}$$

故二次型的矩阵 **A** 在变换 **P** 下成为 $\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}$．

两个实二次型 $(\mathbf{x},\mathbf{A}\mathbf{x})$ 与 $(\mathbf{x},\mathbf{B}\mathbf{x})$ 称为是等价的，如果能用坐标变换把一个转化为另一个．若变换是正交的，二次型称为是正交等价的．每一个实二次型 $(\mathbf{x},\mathbf{A}\mathbf{x})$ 正交等价于二次型

$$(\mathbf{x},\mathbf{D}\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^2, \tag{7}$$

其中 $\mathbf{D}=\mathrm{diag}[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n]$，而 λ_i 是 **A** 的特征根．这个结果可从定理 3.9-1 得出，该定理指出一个实对称矩阵相似于对角形矩阵．

我们断言[Gantmacher,1959]：每一个实二次型 $(\mathbf{x},\mathbf{A}\mathbf{x})$ 等价于二次型

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-\cdots-x_r^2 \tag{8}$$

其中 r 是 **A** 的秩，而 p 是 **A** 的正特征根的个数．表达式(8)称为 $(\mathbf{x},\mathbf{A}\mathbf{x})$ 的实规范形式．

正根个数与负根个数的差称为二次型的符号差．像二次型的

秩一样，符号差及正特征根的个数在任意变换下都是不变的．前面的叙述构成二次型的惯性律．

从表达式(7)我们观察到：若 $\lambda_i>0, i=1,2,\cdots,n$，则二次型对一切非零的 x_i 是正的．这样的二次型称为正定的，因为它除去原点外在空间的每一点取正值，而在原点它取零值．更正式些，一个实二次型 $(\mathbf{x},\mathbf{Ax})$，若对 $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ 有

$$(\mathbf{x},\mathbf{Ax})>0 \quad (<0) \tag{9}$$

称为正(负)定的．若对变量的任意实值

$$(\mathbf{x},\mathbf{Ax})\geqslant 0 \quad (\leqslant 0) \tag{10}$$

二次型称为非负(非正)的或半正(负)定的．若二次型 $(\mathbf{x},\mathbf{Ax})$ 是正的，我们说 $\mathbf{A}$ 是正的并且写成 $\mathbf{A}>\mathbf{0}$．同样，若二次型是负的，我们说矩阵是负的，记为 $\mathbf{A}<\mathbf{0}$．我们已经证明若矩阵的一切特征根是正(负)的，则此矩阵是正(负)的．于是有结论：一个非负(非正)的矩阵是正定(负定)的，当且仅当它是非奇的，即没有特征根是零．

下面的定理应用了矩阵 $\mathbf{A}$ 的主子式．

定理 3.11-1 一个二次型 $(\mathbf{x},\mathbf{Ax})$ 或其关联的矩阵 $\mathbf{A}$ 是正定的当且仅当

$$\beta_1>0,\beta_2>0,\cdots,\beta_n>0$$

其中 β_i 是A的顺序主子式(参看§ 3.8)．

定理 3.11-1 用下例说明之．

例 3.11-2 二次型

$$Q(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+4\,x_2x_3+3\,x_1x_3$$

有关联的对称矩阵

$$\mathbf{A}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&1&3\\1&0&4\\3&4&0\end{bmatrix}$$

有 $\beta_1=\text{trace}\,\mathbf{A}=0$，故 Q 是非正定的．如果一切主子式都是非负的，矩阵将

是非负定的，A 的三个一阶主子式都是零。二阶主子式是：

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & \frac{4}{2} \\ \frac{4}{2} & 0 \end{vmatrix}$$

它们全是负的。三阶主子式是行列式

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

二次型既非正的也非负的，由二次型本身看出这是十分清楚的。设 $x_1=0$，则 $Q=3x_2x_3$，它是正、负或零依赖于 x_2 与 x_3。

把正定二次型

$$(\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x}) > 0 \quad \mathbf{x} \neq 0 \tag{11}$$

作为长度的度量，我们看出它满足范数的公设。所以将用正定二次型(11)来定义一个一般的欧氏范数。为了强调范数的形式(11)，我们经常利用(4)式的记号，即

$$(\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{A}}^2 \tag{12}$$

3.12. 矩阵范数

范数的概念可以推广到矩阵上去。矩阵 A 的欧氏范数定义为

$$N(\mathbf{A}) = [\mathrm{trace}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2\right)^{1/2} \tag{1}$$

这个范数显然是第二章定义的范数的推广。记号 $\|A\|$ 也用于矩阵的范数，并且在这样的记号下我们可建立：

$$\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\| \leqslant \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\| \tag{2}$$

$$\|\mathbf{A}\mathbf{B}\| \leqslant \|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{B}\| \tag{3}$$

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{x}\| \tag{4}$$

其中 x 为矢量。

有时更便于使用的另一范数定义为

$$\|\mathbf{A}\|=\sum_{i,j}|a_{ij}| \tag{5}$$

对于(5)式的范数，三角形不等式(2)是容易证明的。考察

$$\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\|=\sum_{i,j}|a_{ij}+b_{ij}|$$

$$\leqslant\sum_{i,j}|a_{ij}|+\sum_{i,j}|b_{ij}|$$

$$\leqslant\|\mathbf{A}\|+\|\mathbf{B}\|$$

像矢量一样，可以定义多种的范数。一些比另一些更易于使用。

3.13. 矩阵微积分

在以后各章中我们将考察元素都是标量 t 的函数的矩阵和矢量。为了明显地表出矩阵 $\mathbf{A}$ 的元素 a_{ij} 依赖于参量 t，可写

$$\mathbf{A}(t)=[a_{ij}(t)] \tag{1}$$

显然，矩阵或矢量可以是多于一个标量自变量的函数。事实上，在§3.4 中我们已经介绍并定义过线性算子作为 n 个标量自变量的矢量函数。

矩阵 $\mathbf{A}(t)$ 对于自变量 t 的导数定义为

$$\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}\triangleq\left[\frac{da_{ij}}{dt}\right] \tag{2}$$

(2) 式指出矩阵对于标量自变量的导数是一个矩阵，它由微分原矩阵的每一个元素而得到。(2) 式的一个特殊情况是对于列矢量 $\mathbf{x}(t)$ 如下：

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} \tag{3}$$

在(3)式中，为方便计已省写了自变量 t 。在今后的运算中，将照此方式省去自变量，除非会产生混淆的情况。现考察下面的例子。

例 3.13-1 试证 $\mathbf{x}(t)$ 与 $\mathbf{y}(t)$ 的内积的导数由

$$\frac{d(\mathbf{x},\mathbf{y})}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt},\mathbf{y}\right)+\left(\mathbf{x},\frac{d\mathbf{y}}{dt}\right) \tag{4}$$

给出。

证明：

$$\begin{aligned}\frac{d(\mathbf{x},\mathbf{y})}{dt} &= \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}(x_i y_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(y_i\frac{dx_i}{dt}+x_i\frac{dy_i}{dt}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{dx_i}{dt}y_i+\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{dy_i}{dt} \\ &= \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt},\mathbf{y}\right)+\left(\mathbf{x},\frac{d\mathbf{y}}{dt}\right)\end{aligned}$$

我们留给读者用类似于例 3.13-1 的方法证明：

$$\frac{d(\mathbf{A}\mathbf{x})}{dt} = \frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{x}+\mathbf{A}\frac{d\mathbf{x}}{dt} \tag{5}$$

$$\frac{d(\mathbf{A}\mathbf{B})}{dt} = \frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{B}+\mathbf{A}\frac{d\mathbf{B}}{dt} \tag{6}$$

$$\frac{d(\mathbf{A}^{-1})}{dt} = -\mathbf{A}^{-1}\frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{A}^{-1} \tag{7}$$

与(2)式类似，矩阵的积分定义为

$$\int^{t}\mathbf{A}(\alpha)d\alpha\triangleq\left[\int^{t}a_{ij}(\alpha)d\alpha\right] \tag{8}$$

特别，一个列矢量的积分定义为

$$\int^{t}\mathbf{x}(\alpha)d\alpha\triangleq\begin{bmatrix}\int^{t}x_1(\alpha)d\alpha\\ \int^{t}x_2(\alpha)d\alpha\\ \vdots\\ \int^{t}x_n(\alpha)d\alpha\end{bmatrix} \tag{9}$$

根据(2)与(8)的定义，显然几乎微积分中的一切运算可以用到矢量与矩阵上去．然而必须记住，矩阵一般来说是不可交换的。除此以外，许多微积分方法可以直接应用。

按照这些想法，现在可以建立矩阵与矢量的拉氏变换．例如从(8)式可立即得到矩阵的拉氏变换式(参看附录 A)是

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[\mathbf{A}(t)]&=\int_0^{\infty}\mathbf{A}(t)e^{-st}dt\\ &=\left[\int_0^{\infty}a_{ij}(t)e^{-st}dt\right]\\ &=[a_{ij}(s)]=\mathbf{A}(s)\end{aligned} \tag{10}$$

又如果 $\mathbf{A}$ 是一个常矩阵，则

$$\mathscr{L}[\mathbf{AB}]=\mathbf{A}\mathscr{L}[\mathbf{B}] \tag{11}$$

导数的拉氏变换式也是容易建立的。

$$\mathscr{L}\left[\frac{d}{dt}\mathbf{x}\right]=\begin{bmatrix}\mathscr{L}\left[\dfrac{dx_1}{dt}\right]\\ \mathscr{L}\left[\dfrac{dx_2}{dt}\right]\\ \vdots\\ \mathscr{L}\left[\dfrac{dx_n}{dt}\right]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}sx_1(s)-x_1(0)\\ sx_2(s)-x_2(0)\\ \vdots\\ sx_n(s)-x_n(0)\end{bmatrix}$$

$$=s\mathbf{x}(s)-\mathbf{x}(0) \tag{12}$$

读者应当毫无困难地去建立其它拉氏变换式。

现在介绍标量对于矢量的导数概念。事实上，我们也要考虑矢量对于矢量的导数。标量对于矢量的导数定义为一行矢量。即设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是 n 个变量 x_i 的标量函数。或者，像我们在§3.4 见到过的，函数 f 可以看作是 n 维 列矢元 $\mathbf{x}$ 的 标量函数。所以我们需要把导数$\dfrac{df(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}}$定义为行矢量

$$\frac{df(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \triangleq \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{13}$$

(13)式在下列例子中说明之。

例 3.13-2 设$f(\mathbf{x})=(\mathbf{c},\mathbf{x})$，其中 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{c}$ 是列矢量且 $\mathbf{c}$ 为常矢量。由定义

$$\frac{d(\mathbf{c},\mathbf{x})}{d\mathbf{x}}=\begin{bmatrix} \dfrac{d(\mathbf{c},\mathbf{x})}{dx_1} & \dfrac{d(\mathbf{c},\mathbf{x})}{dx_2} & \cdots & \dfrac{d(\mathbf{c},\mathbf{x})}{dx_n} \end{bmatrix}$$

$$=[c_1 \ c_2 \cdots c_n]=\mathbf{c}^T$$

为要使(3)与(13)相协调，我们定义 $m\times 1$ 矢量 $\mathbf{y}$ 对于 $n\times 1$ 矢量 $\mathbf{x}$ 的导数是 $m\times n$ 矩阵

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{x}} \triangleq \left[\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right], \qquad \begin{matrix} i=1,2,\cdots,m \\ j=1,2,\cdots,n \end{matrix} \tag{14}$$

(14)式作为一般情况包括了(3)与(13)式所定义的导数。由 (14) 所定义的矩阵有时称为雅可比矩阵。

例 3.13-3 试证矢量 $\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{x}$ 对于 $\mathbf{x}$ 的导数是

$$\frac{d(\mathbf{A}\mathbf{x})}{d\mathbf{x}}=\mathbf{A} \tag{15}$$

$\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{x}$ 的第 i 分量是

$$y_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i=1,2,\cdots,n$$

由(14)，我们有

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{x}}=\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k\right]$$

$$=\left[\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\frac{\partial x_k}{\partial x_j}\right]$$

当 $k=j$ 时偏导数$\frac{\partial x_k}{\partial x_j}$将有值 1，而在其它情况为零。所以括号中的和式化为 a_{ij}。到此已证明了(15)，它可以解释为

$$\frac{d(\mathbf{Ax})}{d\mathbf{x}}=\mathbf{A}\frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{x}}=\mathbf{AI}=\mathbf{A}$$

像偏微分法理论一样，为了我们的需要，链导法则也容易推广。链导法断言：若 f 是 $\mathbf{u}$ 的函数，而 $\mathbf{u}$ 是 $\mathbf{x}$ 的函数，则

$$\frac{df}{d\mathbf{x}}=\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{x}}=\mathbf{f}_u\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{x}} \tag{16}$$

可用求二次型

$$f(\mathbf{u})=(\mathbf{u},\ \mathbf{Au}) \tag{17}$$

的导数来说明链导法则。设 $\mathbf{v}=\mathbf{Au}$ 且写

$$G(\mathbf{u},\ \mathbf{v})=(\mathbf{u},\ \mathbf{v})$$

于是

$$\frac{df}{d\mathbf{u}}=\frac{\partial G}{\partial \mathbf{u}}+\frac{\partial G}{\partial \mathbf{v}}\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{u}} \tag{18}$$

由例 3.13-2，得到结果

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{u}}=\mathbf{v}^T,\qquad \frac{\partial G}{\partial \mathbf{v}}=\mathbf{u}^T$$

又从例 3.13-3，求得$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{u}}=\mathbf{A}$。把这些结果代入(18)式，得到

$$\frac{d(\mathbf{u},\mathbf{Au})}{d\mathbf{u}}=\mathbf{u}^T(\mathbf{A}^T+\mathbf{A}) \tag{19}$$

为了继续这个说明，考察二次型

$$Q(\mathbf{x})=(\mathbf{y}-\mathbf{Bx})^T\mathbf{R}(\mathbf{y}-\mathbf{Bx}) \tag{20}$$

今欲求$\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{x}}$。为此目的，设 $\mathbf{u}=\mathbf{y}-\mathbf{Bx}$，于是

$$Q(\mathbf{u})=\mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u}$$

应用链导法，求得

$$\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{x}}=\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{u}}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \tag{21}$$

由(19)式及例 3.13-3，得到

$$\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{u}}=\mathbf{u}^T(\mathbf{R}+\mathbf{R}^T)$$

及

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}=-\mathbf{B}$$

因此得到

$$\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{x}}=-(\mathbf{y}-\mathbf{B}\mathbf{x})^T(\mathbf{R}+\mathbf{R}^T)\mathbf{B} \tag{22}$$

再考察下面的例子.

例 3.13-4 求矢量的欧氏范数对于矢量的导数，即当 $n=1$ 时求

$$\frac{d\|\mathbf{x}\|^n}{d\mathbf{x}}=\frac{d(\mathbf{x},\mathbf{x})^{\frac{n}{2}}}{d\mathbf{x}}$$

我们有

$$\frac{d}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x},\mathbf{x})^{\frac{n}{2}}=\frac{n}{2}(\mathbf{x},\mathbf{x})^{\frac{n}{2}-1}\frac{d(\mathbf{x},\mathbf{x})}{d\mathbf{x}}=n\|\mathbf{x}\|^{n-2}\mathbf{x}^T$$

对 $n=1$，

$$\frac{d}{d\mathbf{x}}\|\mathbf{x}\|=\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x}^T$$

两个列矢量 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 的外积(有时称为二重积)定义为 $\mathbf{x}\mathbf{y}^T$. 若 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 两者都是 $n\times 1$，读者容易验证

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y}=\mathbf{y}^T\mathbf{x}=\mathrm{trace}(\mathbf{x}\mathbf{y}^T) \tag{23}$$

若 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 都是方阵，稍加计算就可证明

$$\mathrm{trace}(\mathbf{A}\mathbf{B})=\mathrm{trace}(\mathbf{B}\mathbf{A}) \tag{24}$$

特别是若 $\mathbf{A}$ 为方阵

$$\mathrm{trace}(\mathbf{A}\mathbf{x}\mathbf{y}^T)=\mathrm{trace}(\mathbf{x}\mathbf{y}^T\mathbf{A})=\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \tag{25}$$

利用以前对二次型建立的一些结果，可以推出重要结果（也

可参看习题 3.60 到 3.65)。

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\mathbf{x}^T\mathbf{y})}{\partial\mathbf{x}}&=\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\text{trace}(\mathbf{x}\mathbf{y}^T)=\mathbf{y}^T\\ \frac{\partial\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial\mathbf{x}}&=\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\text{trace}(\mathbf{A}\mathbf{x}\mathbf{x}^T)=\mathbf{x}^T(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T)\end{aligned}\tag{26}$$

参考书目

Bell, E. T.: *Men of Mathematics*, Simon and Schuster, Inc., New York, 1937.

Bellman, R.: *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1960.

Gantmacher, F. R.: *The Theory of Matrices*, Vol. 1, Chelsea Publishing Company, New York, 1959.

Hildebrand, F. B.: *Methods of Applied Mathematics*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1961.

Murdoch, D. C.: *Linear Algebra for Under graduates*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1957.

Penrose, A.: Generalized Inverse for Matrices, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, Vol. 51, pp. 406-413, 1955.

Shilov, G. E.: *Theory of Linear Spaces*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1961.

习题

3.1. 试证

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{2}a_{ij}$$

3.2. 已知

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}-1&3&5\\1&-3&-5\\-1&3&5\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{bmatrix}$$

试证

a. $AB=BA$

b. $AC=A$

c. $CA=C$

3.3. 用例子验证

a. 一般来说 $AB\neq BA$.

b. 从 $AB=0$ 不一定导出 $A=0$ 或 $B=0$.

c. 从 $AB=AC$ 不一定导出 $B=C$.

3.4. 试证

a. $(A+B)^T=A^T+B^T$

b. $\text{trace}(A+B)=\text{trace}\,A+\text{trace}\,B$

c. $\text{trace}(kA)=k\,\text{trace}\,A$($k$ 为标量)

d. $\text{trace}(AB)=\text{trace}(BA)$

3.5. 若 A 是任一方阵，试证 $A+A^T$ 是对称的.

3.6. 若 A 是任一方阵，试证 $A-A^T$ 是斜对称的.

3.7. 试证 $(AB)^T=B^TA^T$.

3.8. 若 $|A|$ 是 A 的行列式，试求 kA 的行列式，其中 k 是一个标量，而 A 是 n 阶的.

3.9. 试求下列每个矩阵的秩

a. $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$　　b. $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$　　d. $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

3.10. 确定

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 5\\ -1 & -2 & 6 & 7\end{bmatrix}$$

的秩.

3.11. 利用下面的定理，判定下列矢量组的线性相关性：

a. [2 1 0],[4 1 −3], [0 2 4]

b. [1 4 5],[2 −1 −2],[7 10 11]

定理：矩阵 **B** 的行列式等于零的充要条件是 **B** 的秩小于阶数，或换言之，**B** 的行(列)矢量是线性相关的。

定理：若一个矩阵的最大非奇子矩阵是 r 阶的，则此矩阵有秩 r。

3.12. 设 $\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\cdots,\mathbf{A}_m$ 分别是 $n_1,n_2,\cdots,n_m$ 阶方阵。考察对角形分块矩阵 $\mathbf{A}=\mathrm{diag}[\mathbf{A}_1,\ \mathbf{A}_2,\cdots,\ \mathbf{A}_m]$ 及另一对角形分块矩阵 $\mathbf{B}=\mathrm{diag}[\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2,\cdots,\mathbf{B}_m]$。试证 $\mathbf{AB}=\mathrm{diag}[\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1,\ \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2,\cdots,\mathbf{A}_m\mathbf{B}_m]$。

3.13. 试求分块矩阵 **A** 的逆。设

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{c|c} \overset{p\times p}{\mathbf{A}_{11}} & \overset{p\times q}{\mathbf{A}_{12}} \\ \hline \overset{q\times p}{\mathbf{A}_{21}} & \overset{q\times q}{\mathbf{A}_{22}} \end{array}\right],\qquad \mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}=\left[\begin{array}{c|c} \overset{p\times p}{\mathbf{B}_{11}} & \overset{p\times q}{\mathbf{B}_{12}} \\ \hline \overset{q\times p}{\mathbf{B}_{21}} & \overset{q\times q}{\mathbf{B}_{22}} \end{array}\right]$$

并把 $\mathbf{B}_{ij}$ 用 $\mathbf{A}_{ij}$ 表出。指出你的证明中需要的假设。

答案：$\mathbf{B}_{11}=\mathbf{A}_{11}^{-1}+(\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12})\mathbf{B}_{22}(\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1})$；$\mathbf{B}_{12}=-(\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12})\mathbf{B}_{22}$；

$\mathbf{B}_{21}=-\mathbf{B}_{22}(\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1})$；$\mathbf{B}_{22}=[\mathbf{A}_{22}-\mathbf{A}_{21}(\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12})]^{-1}$

3.14. 试求

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

的逆，利用所示的分块(参看习题 3.13)。

3.15. 试求线性算子的矩阵，它把 $R(n)$ 中每一矢量映射成零矢量。

3.16. 试求线性算子 **A** 的矩阵，使得 **A** 把每一矢量 **x** 映射到自身，即对 $R(n)$ 中一切 **x** 有 $\mathbf{Ax}=\mathbf{x}$。

3.17. 试求线性算子 **A** 的矩阵，使得 **A** 把每一矢量 **x** 映射成本身与一个标量的乘积，即对实数 λ 及 $R(n)$ 中的一切 **x** 有 $\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{x}$。

3.18. 算子 **A** 把矢量组

$$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

映射成

$$\mathbf{y}_1=\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix},\quad \mathbf{y}_2=\begin{bmatrix}4\\3\\2\end{bmatrix},\quad \mathbf{y}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

确定算子在基底

$$\mathbf{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{e}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

中的矩阵。

3.19. 试证正交矩阵 $\mathbf{P}$ 的行列式是 ± 1。当行列式为 $+1$，矩阵称为正常正交的。

3.20. 试证正交矩阵的逆或转置是正交的。 试证两个或多个正交矩阵的乘积是正交的。

3.21. 把一个 $n\times n$ 正交矩阵 $\mathbf{P}$ 分块成 n 个列矢量 $\mathbf{P}_i$，并作乘积

$$\mathbf{P}^T\mathbf{P}=[\mathbf{P}_i^T\mathbf{P}_j]=\mathbf{I}$$

因为

$$[\mathbf{P}_i^T\mathbf{P}_j]=\mathbf{I}=[\delta_{ij}]$$

推出一个正交矩阵的列矢量是互相正交的单位矢量。推出这个以后，把 $\mathbf{P}$ 分块成行矢量并作乘积 $\mathbf{P}\mathbf{P}^T=\mathbf{I}$。由此，你能得出什么结论？

答案：行矢量是正交的。

3.22. 验证在例 3.3-5 中的正交矩阵的列矢量与行矢量都是单位矢量并且互相是正交的。

3.23. 写出下列坐标变换（一切都是列矢量）所要求的矩阵，

a. 从基底(1,0),(0,1)到基底(2,1),(3,2)。

b. 从基底(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)到基底(2,−1,0),(1,1,1),(−3,0,4)。

3.24. 试求列矢量$[2\ 1\ 3\ 4]^T$关于基底 $\mathbf{F}_1=[1\ 1\ 0\ 0]^T$, $\mathbf{F}_2=[1\ 0\ 1\ 0]^T$, $\mathbf{F}_3=[1\ 0\ 0\ 1]^T$, $\mathbf{F}_4=[0\ 0\ 1\ 1]^T$的坐标。

3.25. 试求新坐标用旧坐标表示时的矩阵，它是两次相继的旋转：绕 $\mathbf{e}_1$ 转 α 再绕中间轴 $\mathbf{e}_2$ 旋转 β。（参看例 3.5-1.）

3.26. 试证坐标变换的矩阵 $\mathbf{P}$ 是非奇的[参看关系式(3.5-2)]。

3.27. 验证例 3.5-2 中的矩阵相似于矩阵 diag[1,2,3]。

3.28. 试证在(3.9-9)中的矩阵 $\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I}$ 是可交换的。

3.29. 验证(3.9-10)式。

3.30. 设 λ_i 是矩阵 $\mathbf{M}$ 的特征值而 $\mathbf{x}_i$ 是与 λ_i 相关联的特征矢量。试求 $\mathbf{M}^k$ 的特征值与特征矢量。

3.31. 试证实对称矩阵的特征根全是实的。

3.32. 试证若实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 的两个特征矢量 $\mathbf{x}_1$ 与 $\mathbf{x}_2$ 对应于 $\mathbf{A}$ 的不同的特征根，则 $\mathbf{x}_1$ 与 $\mathbf{x}_2$ 是正交的，即$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)=0$。

3.33. 若下面两个条件成立：$(a)\mathbf{A}=\mathbf{A}^T$及$(b)\mathbf{A}^2=\mathbf{A}$，则方阵 $\mathbf{A}$ 是对称幂等矩阵。试证对称幂等矩阵的特征根或者是零或者是 1。

3.34. 试证 $\mathbf{A}^{-1}$ 的特征根是 $\mathbf{A}$ 的特征根的倒数。

3.35. 试证 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{A}^T$ 有相同的特征根。若 k_1 与 k_2 是 $\mathbf{A}$ 的相异特征根，试证 $\mathbf{A}$ 的对应于 k_1 的任一特征矢量与对应于 k_2 的 $\mathbf{A}^T$ 的任一特征矢量是正交的。

3.36. 考察一般特征值问题

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{B}\mathbf{x}$$

其中 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 都是实对称方阵。设 λ_1 与 λ_2 是不同的特征值，它们分别对应于特征矢量 $\mathbf{u}_1$ 与 $\mathbf{u}_2$。

a. 试证这两个矢量 $\mathbf{u}_1$ 与 $\mathbf{u}_2$ 对于 $\mathbf{B}$ 是正交的，即$(\mathbf{u}_1, \mathbf{B}\mathbf{u}_2)=0$

b. 试证这两个矢量对于 $\mathbf{A}$ 是正交的。

3.37. 设 $\mathbf{T}$ 是一个正交矩阵，试证一切特征根有绝对值 1。

3.38. 试证一个实斜对称矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值不是零就是虚的。(提示：考察厄米特矩阵$i\mathbf{A}$，其中 $i=\sqrt{-1}$。)

3.39. 试求

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

的特征值与特征矢量。

3.40. 试证：若一个矩阵是酉矩阵又是厄米特矩阵，则它必满足方程

$$\mathbf{U}^2=\mathbf{I}$$

3.41. 若 $\mathbf{A}$ 是厄米特矩阵，试证 $\mathbf{A}^T$ 也是厄米特矩阵。

3.42. 已给二次型

$$Q=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3$$

写出合适的对称矩阵。这个矩阵是否相似于一个对角形矩阵？试求这个对角形矩阵。

3.43．写出化下列二次型为平方和的坐标变换的方程组。

a．$x_1^2+4x_1x_2+x_2^2$

b．$x_1^2+x_2^2-8x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$

3.44．考察圆锥曲线

$$x_1^2-12x_1x_2-4x_2^2=40$$

作变量变换使其没有交叉相乘项出现。与上述形式关联的矩阵应属于那一类：正的或负的，等等？

3.45．试证两个对称矩阵的乘积是对称的当且仅当两个矩阵是可交换的。

3.46．试证对称矩阵的任意次幂是对称的。

3.47．若 $\mathbf{D}$ 是一个对角形矩阵，其对角线元素为 d_i，试证矩阵指数

$$e^{\mathbf{D}}=[e^{d_i}]$$

其中$[e^{d_i}]$是具有对角线元素 e^{d_i} 的对角形矩阵。

3.48．若一个矩阵相似于一个对角形矩阵，则存在一个非奇矩阵 $\mathbf{P}$ 使得 $\mathbf{A}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{P}$，其中 $\mathbf{D}$ 是一个对角形矩阵。由此推得 $\mathbf{A}^k=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{D}^k\mathbf{P}$。利用此结果及习题 3.47 的结果，试建立结果

$$e^{\mathbf{A}}=\mathbf{P}^{-1}e^{\mathbf{PAP}^{-1}}\mathbf{P}=\mathbf{P}^{-1}[e^{d_i}]\mathbf{P}$$

3.49．利用习题 3.48 的结果求 $e^{\mathbf{A}}$。

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

3.50．设 $\mathbf{B}$ 是斜对称矩阵，即 $\mathbf{B}+\mathbf{B}^T=0$。试证 $e^{\mathbf{B}}$ 是正常正交的（参看习题 3.19）。

3.51．试求 $e^{\mathbf{A}t}$ 的拉氏变换式。　　答案：$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$

3.52．试求$\dfrac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{Ax}$的拉氏变换式（与习题 3.51 的结果比较之）。

3.53．试求 $e^{\mathbf{A}}$，其中

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

3.54. 试求正交矩阵的欧氏范数。

3.55. 利用欧氏范数，试证不等式(3.12-3)。

3.56. 验证 $\mathbf{x}^T\mathbf{y}=\text{trace}\ \mathbf{x}\mathbf{y}^T$。

3.57. 试证(3.13-5)，(3.13-6)及(3.13-7)式。

3.58. 已知矩阵方程

$$\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\varepsilon$$

其中 A 是 $m\times n$ 的，$m>n$。试求 x 使得$(\varepsilon,\varepsilon)$极小。

3.59. 设$\dfrac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{A}\mathbf{x}$；对二次型 $\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x}$，试证

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x})=\mathbf{x}^T[\mathbf{A}^T\mathbf{B}+\mathbf{B}\mathbf{A}]\mathbf{x}=2\,\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{x}$$

其中 $\mathbf{A}^T\neq\mathbf{A}$，而 $\mathbf{B}^T=\mathbf{B}$。检查$[\mathbf{A}^T\mathbf{B}+\mathbf{B}\mathbf{A}]$与 BA 的对称性。

3.60. 试证

$$\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{x}}=\mathbf{I}$$

3.61. 若$\mathbf{i}=\dfrac{1}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x}$(单位矢量)，试证

$$\frac{\partial\mathbf{i}}{\partial\mathbf{x}}=\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}[\mathbf{I}-\mathbf{i}\,\mathbf{i}^T]$$

3.62. 试证

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}[f(\mathbf{x})\mathbf{x}]=f(\mathbf{x})\mathbf{I}+\mathbf{x}\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}$$

3.63. 试证

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}[\sin(\mathbf{c},\ \mathbf{x})]=[\cos(\mathbf{c},\ \mathbf{x})]\mathbf{c}^T$$

3.64. 试证

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}[\cos(\mathbf{c},\ \mathbf{x})]=[-\sin(\mathbf{c},\ \mathbf{x})]\mathbf{c}^T$$

3.65. 试证重力梯度矩阵可表示为

$$\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\mathbf{r}}=-\mu\|\mathbf{r}\|^{-3}\mathbf{I}+3\,\mu\|\mathbf{r}\|^{-5}\mathbf{r}\mathbf{r}^T$$

其中

$$\mathbf{g}=-\mu\|\mathbf{r}\|^{-3}\mathbf{r}$$

(参看习题 3.61.)

第四章　状态空间与状态方程

4.1. 引言

在这一章我们介绍状态的概念以及建立把一系统与状态矢量联系起来的方法. 虽然给出状态的一个定义——它对本书的意图来说是足够的——但是在这一章中不企图严格地证明一个被选出的状态矢量必须满足定义. 主要是提出对一个系统配以一个状态矢量的方法.选好状态矢量之后,讨论建立状态方程的方法. 我们利用第五章中提供的材料证实一个特定的状态矢量符合这样的情况. 在第四章定义状态矢量及建立状态方程而在第五章解状态方程并证明状态矢量满足状态的定义，在这种意义下第四、五章是互相增进的.

我们将关心的多半是用微分方程所描述的系统. 特别是从线性时不变系统开始,因为它们最容易分析. 就此而论,我们考察单输入单输出系统. 这些系统用于引进基本概念并说明关联状态矢量的流图技术(附录Ⅰ)的用法. 一旦基本方法建立起来,就可说明推广这些概念到更复杂的系统去是一件容易的事情. 特别是在§ 4.8 要推广这些概念到多输入多输出的线性时变系统，而在第八章要推广到离散时间系统.

本章开始部分大都是处理记号与定义以及说明性的例子. 例如用一节来准确定义什么是线性系统. 这个定义被表达成状态空间的记号并用到第二、三章的数学. 此外,准确定义时不变性并给脉冲函数及传递函数一个简短的介绍.

4.2. 状态

对物理系统，状态的一个直观定义是由图 4.2-1 所示 RLC

电路中提出的。众所周知，如果已知通过电感的初始电流和电容的初始端电压以及激励电压，在任何特定时刻电路的响应是容易计算的。为了得出状态的定义，考察这个例子的三个组成部分，即基本电路、初始条件及激励函数。从某时刻 t_0 开始，作用一个电压 e 于电路 N，电路的输出(或者通过 R_2 的端电压 y)不仅依赖激励电压而且也依赖于 N 在时刻 t_0 的初始条件。这些初始条件大致构成 N 的初始状态。我们定义电路 N 的状态是最少个数的变量，它包含过去的足够的信息能使我们计算电路的未来的性态。更一般些，系统的状态由下列定义正式给出[Kalman，1960]。

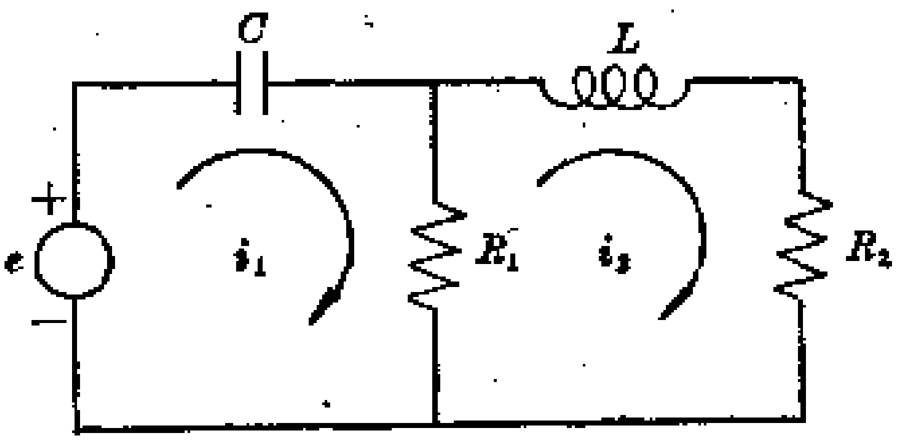


图 4.2-1 一个简单的 RLC 电路。

定义 4.2-1 系统或数学过程的状态是变量(称为状态变量)的一个最小集合，它包含此系统或过程的过去的足够信息能以计算未来的性态。

为了把状态的定义用数学语言明确地表示出来，需要一些记号。设系统或过程用 S 表示。联系着 S 的是一组输入变量 u_1，u_2，$\cdots$，u_p 及一组输出变量 y_1，y_2，$\cdots$，y_m。为方便起见，把输入变量 u_1，u_2，$\cdots$，u_p 用输入矢量

$$\mathbf{u}=[u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_p]^T$$

表示，输出矢量 $\mathbf{y}$ 可同样定义为 $m\times 1$ 列矢量

$$\mathbf{y}=[y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_m]^T$$

输入矢量与输出矢量均假设为时间 t 的函数，为要明显地指出这点，我们分别用 $\mathbf{u}(t)$ 与 $\mathbf{y}(t)$ 来记 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{y}$ 在时刻 t 的值。

如所指出的输入矢量与输出矢量的定义，我们运算的大部分将在 n 维欧氏空间 R^n(或酉空间 C^n)中进行。所以矢量 $\mathbf{u}$ 在时

刻 t 的一切可能值的集合称为输入空间。同样可定义输出空间为矢量 $\mathbf{y}$ 在时刻 t 的一切可能值的集合。

指出一组状态变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 后，我们就可定义状态矢量作为 $n\times1$ 列矢量 $\mathbf{x}=[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T$。于是状态空间定义为状态矢量在时刻 t 的一切可能值的集合。

现在能够用状态矢量、输入矢量及输出矢量来表出状态的定义。用符号表示，定义意味着状态矢量 $\mathbf{x}$ 可写成

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{F}[\mathbf{x}(t_0);\mathbf{u}(t)] \tag{1}$$

其中 $\mathbf{F}$ 是自变量的单值函数[Zadeh 和 Desoer，1963]。关系式(1)指出 S 的未来状态 $\mathbf{x}(t)$ 可由状态空间的任何 $\mathbf{x}(t_0)$ 及输入空间的任何 $\mathbf{u}(t)$ 来计算。输出方程抽象地定义为

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{G}[\mathbf{x}(t_0);\mathbf{u}(t)] \tag{2}$$

其中 $\mathbf{G}$ 也是变元的单值函数。方程(1)与(2)构成了系统 S 的状态方程。如果 S 是用一组一阶微分方程来描述的，于是像我们将要看到的，方程(1)与(2)取如下形式：

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}[\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{u}^{(1)},\cdots,\mathbf{u}^{(k)},t] \tag{3}$$

$$\mathbf{y}=\mathbf{g}[\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{u}^{(1)},\cdots,\mathbf{u}^{(k)},t] \tag{4}$$

其中 $\mathbf{u}^{(i)}$ 是 $\mathbf{u}$ 关于时间的 i 阶导数。下面的例子说明这个情况。

例 4.2-1 考察非线性微分方程

$$\ddot{z}+4z\dot{z}+2z=\cos t$$

定义状态变量为 $x_1=z$ 及 $x_2=\dot{z}$，可相继写出

$$\dot{x}_1=\dot{z}=x_2$$

$$\dot{x}_2=\cos t-4\dot{x}_1x_1-2x_1$$

$$=\cos t-4x_2x_1-2x_1$$

今定义状态矢量 $\mathbf{x}$ 为列矢量 $x=[x_1 \quad x_2]^T$，则有

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\ -2x_1(1+2x_2)+\cos t\end{bmatrix}$$

或

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

其中输入矢量 u 是列矢量 $\mathbf{u} = [0 \quad \cos t]^T$。

我们主要将关心于微分系统，即输入与输出是用微分方程组联系起来的系统。我们也要考察离散时间系统或抽样数据系统。微分系统及离散时间系统二者都称为动态系统。动态元件与(或)动态系统的分类涉及到元件或系统，它的输出不仅依赖于输入的现在值而且也依赖于输入的过去值。连续动态元件是用常微分方程来描述的。连续动态系统是连续动态元件的互相结合。动态系统的例子包括发动机、船、电路以及其它物理实物。船的动态元件可以是船的发动机，船的驾驶机构等等。

线性微分系统——我们的注意力大部分集中于此——的状态方程取简化形式[Kalman, 1963]：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \tag{5}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u} \tag{6}$$

图 4.2-1 所示的 RLC 电路的状态方程很容易写成这种形式，如下例所示

例 4.2-2 在图 4.2-1 中，设 i_L 为流经电感 L 的电流，而 v_L 为电感的端电压，于是

$$v_L = L\frac{di_L}{dt}$$

如果 v_C 为电容 C 的端电压，而 i_C 是流经电容的电流，于是

$$i_C = C\frac{dv_c}{dt}$$

电容与电感是动态元件，它们与电阻联接起来组成一个动态电路或系统。

为了给电路配以状态矢量，我们定义一组状态变量如回路电流 $x_1 = i_1$ 及 $x_2 = i_2$。从电路分析有

$$e = \frac{1}{C}\int i_1 dt + R_1(i_1 - i_2)$$

$$0 = R_1(i_2 - i_1) + L\frac{di_2}{dt} + R_2 i_2$$

微分第一个方程，用 $x_1=i_1$ 及 $\dot{x}_1=\frac{di_1}{dt}$ 代入并整理之，有

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{R_1}{L}-\frac{1}{R_1C} & -\frac{R_1+R_2}{L}\\ \frac{R_1}{L} & -\frac{R_1+R_2}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{\dot{e}}{R_1}\\ 0\end{bmatrix}$$

它具有方程(5)的形式，A 是 2×2 的系数矩阵，B 是 2×2 的单位矩阵，输入矢量 $\mathbf{u}$ 为

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}\frac{\dot{e}}{R_1}\\ 0\end{bmatrix}$$

如果输出定义为 R_2 的端电压 y，则

$$\begin{aligned}y&=R_2i_2=R_2x_2\\ &=[0\ \ R_2]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\mathbf{Cx}\end{aligned}$$

它具有方程(6)的形式。

在例 4.2-2 中状态方程被建立起来，在那里把回路电流取作状态变量。关于状态变量的选取不是唯一的。例如，我们也可以选状态变量为电容的端电压与流经电感的电流。事实上，这个选取法经常产生有效的状态变量[Zadeh 与 Desoer, 1963]。

直到现在，我们给了状态的基本定义并用例子介绍了一些确定的方程。在这一章随后的讨论中，我们要说明对一个系统配上一个状态矢量的方法。因为我们的研究大都集中在线性系统，我们推迟对一个系统配以状态矢量的详细讨论直到正式定义了线性性质时。首先要建立一些一般的记号并给出与今后讨论有关的一些定义。

4.3. 记号与定义

对系统 S，我们利用抽象的记号

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{S}[\mathbf{x}(t_0);\mathbf{u}(t)] \tag{1}$$

或更简单些

$$\mathbf{y}=\mathbf{S}(\mathbf{x}_0;\mathbf{u}) \tag{2}$$

在表达式(1)与(2)中，$y(t)$是输出矢量在时刻 t 的值，系统 S 从初态 $\mathbf{x}_0=\mathbf{x}(t_0)$出发并由输入矢量$\mathbf{u}(t)$激励．(1)式中记号的意义是指$\mathbf{u}(t)$被作用在时间区间$(t_0,t)$上．在(2)式中无疑地理解为在同一个时间区间．如果 u 作用于另一时间区间，则应明白地指出来．

假设系统的初态是零，又假设输入为零，于是我们可以确定地说此系统的输出将保持为零．另一方面，对于一个非零的初态也可能发生同样的情况．亦即对于某些非零的初态，系统受到零输入，其输出可以是零．这样，导致我们定义零态为输入为零时使得系统的响应(输出)为零的初态[Zadeh 和 Desoer, 1963]．用记号表示，如果

$$\mathbf{0}=\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta};\mathbf{0})$$

则 θ 是一个零态．为了说明零态的定义，给出下列例子．

例 4.3-1 考察图 4.3-1 a 的电路．系统的微分方程是

$$u=L\frac{dx}{dt}$$

其中 x 是回路电流．如果电流取作输出，则求解后得到

$$x(t)=x(t_0)+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u(\xi)d\xi$$

对零输入，即 $u(t)=0$，上式成为

$$x(t)=x(t_0)$$

在这个例子中，从 $x(t_0)=0$ 得出 $x(t)=0$，因此 $x(t_0)=0$ 是唯一的零态．

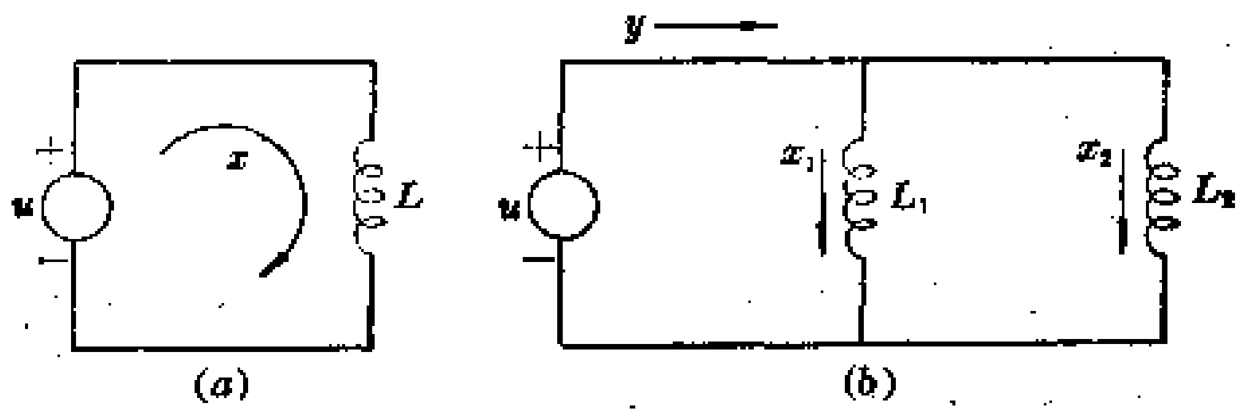


图 4.3-1 例 4.3-1 与 4.3-2 中的简单电路．

零态θ不一定是唯一的，也不需要是零。然而，除非有相反的说明，在本书中总是假设有唯一的零态。在例 4.3-2 中介绍一个假设条件，它产生一个既非唯一的也非零的零态。

例 4.3-2 在图 4.3-1 *b* 中，两个电感 L_1 与 L_2 并联，通过电压为 u。定义电路中的状态变量为通过电感 L_1 与 L_2 的两个电流 x_1 与 x_2。我们有两个方程

$$\dot{x}_1=\frac{u}{L_1}$$

$$\dot{x}_2=\frac{u}{L_2}$$

更简洁些，我们有矢量方程

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{g}u$$

其中

$$\mathbf{g}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{L_1}\\[2mm]\dfrac{1}{L_2}\end{bmatrix}$$

对于零输入，解是

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}(t_0)$$

今设想系统的输出定义为总电流，即$y=x_1+x_2$。设M是矩阵

$$\mathbf{M}=[\,1\quad 1\,]$$

于是

$$\begin{aligned}y(t)&=\mathbf{M}\mathbf{x}(t)=\mathbf{M}\mathbf{x}(t_0)\\&=x_1(t_0)+x_2(t_0)\end{aligned}$$

此电路的一个零态显然是使得 $x_1(t_0)=-x_2(t_0)$的任何状态。

另一个有趣的状态是基态，它经常与零态一致。我们考察具有零输入(即 $\mathbf{u}(t)=0$)的系统并研究系统的状态 $\mathbf{x}(t)$当 t 无限增大时的情况。我们只关心这样的情况：当 t 趋于无穷时，$\mathbf{x}(t)$趋于某个极限 $\mathbf{x}_g$。换言之，我们的注意力集中在 $\mathbf{x}(t)$的稳态值，假如它存在的话。极限状态

$$\mathbf{x}_g=\lim_{t\to\infty}\mathbf{x}(t)$$

可能依赖于状态 $\mathbf{x}(t_0)$．假若 $\mathbf{x}_g$ 与初态无关，则 $\mathbf{x}_g$ 定义为基态．用记号表示，如果极限

$$\mathbf{x}_g = \lim_{t\to\infty} \mathbf{F}[\mathbf{x}_0; \mathbf{0}] \tag{3}$$

存在且与 $\mathbf{x}(t_0)$ 无关，则 $\mathbf{x}_g$ 是一个基态．(3) 式中的记号是保持了(4.2-1)式中出现的记号．也可以写成

$$\mathbf{x}_g = \lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, \mathbf{0}) \tag{4}$$

其中 $\mathbf{x}(t;\mathbf{x}_0,\mathbf{0})$ 用以明显地表示在时刻 t 状态的值，此状态是从初态 $\mathbf{x}_0$ 出发且有零输入．(3)式与(4)式中的记号引用时多少有些可互换性．

例 4.3-1 与 4.3-2 中的电路没有基态；因为在这两种情况 $\mathbf{x}_g$ 依赖于初态。对例 4.3-1，$\mathbf{x}_g = \mathbf{x}(t_0)$，对例 4.3-2

$$\mathbf{x}_g = \lim_{t\to\infty} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix}$$

所以这两个电路都有零态，而都无基态．今考察下面的例子．

例 4.3-3 在图 4.3-2 中的 RC 电路的状态定义为回路电流．设 x 为电路电流，求得 x 满足微分方程

$$\dot{u} = R\dot{x} + \frac{1}{C}x$$

对零输入，方程有解

$$x(t) = x(t_0)\exp\left[-\frac{1}{RC}(t-t_0)\right]$$

此电路显然有一个唯一的零态及基态，二者都为零．

例 4.3-3 中电路的基态与零态都是零．零也是电路的一个平衡态．我们定义一个系统的平衡态为对零输入是不改变的状态．用符号表示，如果

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{F}[\mathbf{x}_e; \mathbf{0}], \quad t > t_0$$

则 $\mathbf{x}_e$ 是平衡态．或按照(4)式

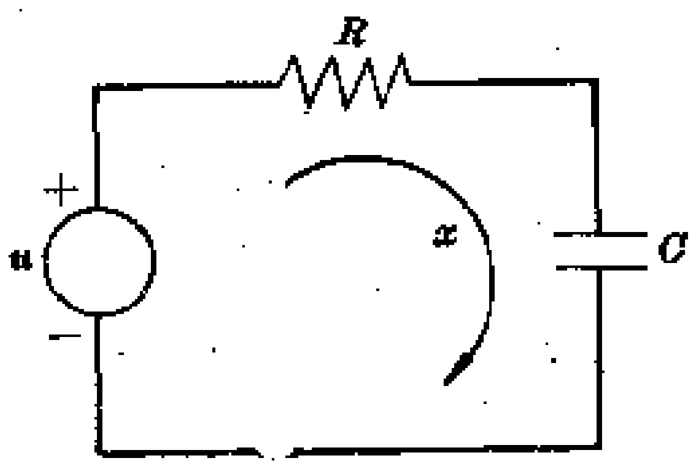


图 4.3-2 例 4.3-3 的回路．

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_e, \mathbf{0})$$

在例 4.3-1 中，$\mathbf{x}(t_0)$是平衡态，因为对一切 $t>t_0$

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}(t_0)$$

在定义零态、基态及平衡态时考察的是系统的零输入．我们也需要考察具有非零输入的从零态出发的系统．一个系统的零态响应定义为初态为零态的系统的响应．用(1)式的记号，写出

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta};\mathbf{u}) \tag{5}$$

用以表示零态响应．基态响应类似地记作

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{s}(\mathbf{x}_g;\mathbf{u}) \tag{6}$$

一个系统的稳态响应记作

$$\mathbf{y}_{ss}=\lim_{t_0\to-\infty}\mathbf{s}(\mathbf{x}_g;\mathbf{u}) \tag{7}$$

如(7)式所指出的，稳态响应是基态响应的极限情况．极限过程 $t_0\to-\infty$ 指明输入 $\mathbf{u}$ 被作用在无穷的过去上．

4.4. 线性系统

我们可以列出许多理由说明本书用大量篇幅强调及致力于线性系统的研究．首先，线性系统(特别是时不变系统)的解析处理是容易实现的，因为这些系统已有广泛的研究．其次，时不变线性系统服从于封闭形式的解析解．所以这些系统的研究对我们的研究提供了一个方便的出发点并对进一步研究建立了先决条件．然而，这并不是说我们研究线性系统纯粹为了理论上的理由．事实上，许多物理系统是线性的，而其它的能非常准确地近似为线性系统．在最坏的情况下，系统的第一近似的性态是由“线性化”系统方程来提供的．系统的线性化方法在第六章中讨论．

在所介绍的线性系统理论中，试图用我们的经验把状态空间的概念与线性系统分析的其它科目联系起来．这个描述大量地需要第二、三章所讨论的线性空间的概念与想法．

在历史上及很多工程文献中，线性系统被定义为一个可使用“迭加”原理的系统．更正式些说，设想 u 与 y 分别是线性系统的

输入与输出，如图 4.4-1 所示．系统通常被定义为线性的[Truxal，1955]，如果输入 u_i 产生输出 y_i，则由输入

$$u = u_1 + u_2 \tag{1}$$

产生输出

$$y = y_1 + y_2 \tag{2}$$

实际上，(1) 式与(2) 式就是迭加性的一种说法。换言之，输入 u_1 产生 y_1 又输入 u_2 产生 y_2，使得输入 $u_1 + u_2$ 产生 $y_1 + y_2$。线性性质的另一条件是输入 ku 产生输出 ky，其中 k 是一个标量，虽然这一点在工程文献中不是经常明显地说出来的。线性系统的这样两个基本确定的性质正就是线性空间的确定性质，即一个空间如果它在加法及数乘下是封闭的，它就是线性的。

上面所提出的线性性质的传统定义描述线性性质的一种狭义类型[Zadeh 与 Desoer，1963]。一个确定的系统对输入是线性的，但是关于初态的线性性质是什么？考察方程

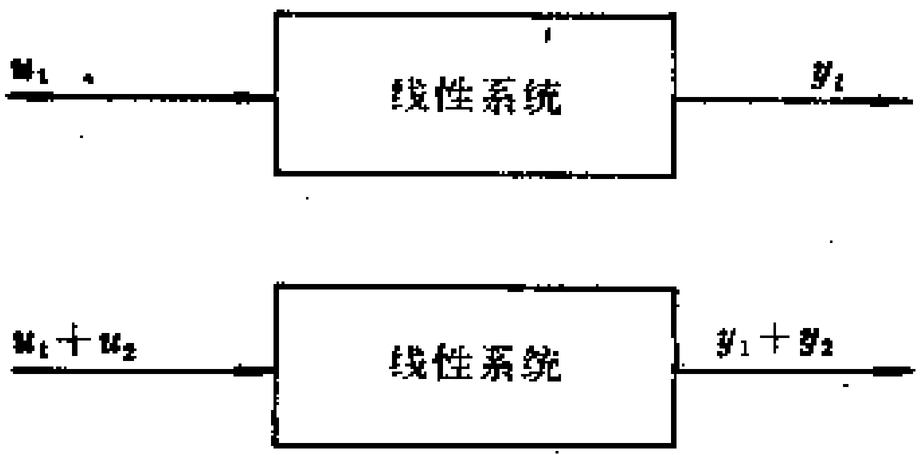


图 4.4-1 具有输入 u_i 与输出 y_i 的单输入单输出线性系统．

$$y(t) = y^2(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-(t-\xi)} u(\xi) d\xi \tag{3}$$

如果 $y(t_0) = 0$，则此系统如上所定义的是线性的。然而，它对于初值条件 $y(t_0)$ 并不是线性的。实际上，上面所定义的是一种零态线性性质。

为了正式给出线性性质的一般定义，我们从假定状态空间是线性的开始。这样，如果 $\mathbf{x}_1$ 与 $\mathbf{x}_2$ 是状态空间中的状态矢量，又 α_1 与 α_2 是标量，则

$$\mathbf{z} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2$$

是状态空间中的一个状态矢量．输入空间与输出空间也都是线性空间．输入空间的线性性质是指：如果 $\mathbf{u}_1$ 与 $\mathbf{u}_2$ 是可允许的输入，则其和

$$\mathbf{u}=\alpha_1\mathbf{u}_1+\alpha_2\mathbf{u}_2$$

也是，其中 α_1 与 α_2 是任意常量．

线性性质的基本确定性质是可加性与齐次性，它们分别对应于在加法下是封闭的与在数乘下是封闭的．下面的定义使齐次性的概念正式化．

定义 4.4-1 一个系统如果它对输入 $k\mathbf{u}$ 的零态响应是对输入 $\mathbf{u}$ 的零态响应的 k 倍，则此系统是齐次的．

用符号表示，定义是

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta};k\mathbf{u})=k\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta};\mathbf{u})\quad（齐次性）\tag{4}$$

(4) 式只是表明零态系统的输出

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta};\mathbf{u})\tag{5}$$

是与输入成正比的．

图 4.2-1 与 4.3-1 中的电路在这个意义下是齐次的，这是容易验证的．由(3)式所描述的系统也是齐次的．下面的定义使可加性的概念正式化．

定义 4.4-2 一个系统如果它对输入 $\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2$ 的零态响应是对 $\mathbf{u}_1$ 与 $\mathbf{u}_2$ 的零态响应的和，则此系统是可加的．

用符号表示，这个定义是

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta};\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)=\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta};\mathbf{u}_1)+\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta};\mathbf{u}_2)\quad（可加性）\tag{6}$$

(6)式表示线性系统的迭加原理．如像(3)式的系统一样，图4.2-1 与 4.3-1 中的电路是可加的．下面的例子提供我们考察更一般的结果．

例 4.4-1 如果一个系统是可加的，则任意个输入能够被迭加．设 S 是可加的，于是

$$\mathbf{S}(\theta;\mathbf{u}_1+\mathbf{z})=\mathbf{S}(\theta;\mathbf{u}_1)+\mathbf{S}(\theta;\mathbf{z})$$

今设想 $\mathbf{z}=\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_3$，于是

$$\mathbf{S}(\theta;\mathbf{z})=\mathbf{S}(\theta;\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_3)=\mathbf{S}(\theta;\mathbf{u}_2)+\mathbf{S}(\theta;\mathbf{u}_3)$$

一般化到 p 个输入，有

$$\mathbf{S}\left(\theta;\sum_{i=1}^{p}\mathbf{u}_i\right)=\sum_{i=1}^{p}\mathbf{S}(\theta;\mathbf{u}_i)$$

如像(3)式所得出的，系统对输入可以是线性的，但是对初始条件不是线性的。反例是很多的。例如

$$y(t)=y(t_0)+\int_{t_0}^{t}u^2(\xi)d\xi \tag{7}$$

对初始条件 $y(t_0)$是线性的，但对输入 $u(t)$是非线性的。

按照前面的讨论，线性性质可分成或定义为两种类型。一个系统当它是齐次的又是可加的被定义为零态线性。这是线性性质的习惯定义。用符号表示，系统 $\mathbf{S}$ 当

$$\mathbf{S}[\boldsymbol{\theta};k(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)]=k\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta};\mathbf{u}_1)-k\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta};\mathbf{u}_2) \tag{8}$$

其中 k 是一个实标量，它是零态线性的。

要指出的是这个定义并不认为零态线性就意味着关于一切初态是线性的。某些系统是零态线性的，但当从任一初态出发时并非必然是线性的。现在给出关于任一初态是线性的较广的定义。一个系统当

$$k\mathbf{S}(\mathbf{x}_0;\mathbf{u})-k\mathbf{S}(\mathbf{x}_0;\mathbf{v})=\mathbf{S}[\boldsymbol{\theta};k(\mathbf{u}-\mathbf{v})] \tag{9}$$

它关于任一初态 $\mathbf{x}_0$ 是线性的。(9)式显然是(8) 式的推广。我们将不去追求包含在这个定义中的细节。读者倘若希望对关于一切可能初态的线性性质作更广泛的讨论及全面的研究可参考 Zadeh 和 Desoer[1963]的更进一步的工作。

我们要定义的线性性质的另一类型是零输入线性性质。一个系统 S 当它的零输入响应对初态既是齐次的又是可加的则被定义为零输入线性。用记号表示，齐次性是

$$\mathbf{S}(k\mathbf{x}_0;\mathbf{0})=k\mathbf{S}(\mathbf{x}_0;\mathbf{0}) \tag{10}$$

当 $\mathbf{x}_1$ 与 $\mathbf{x}_2$ 都是初态，可加性是

$$S(x_1+x_2;0)=S(x_1;0)+S(x_2;0) \tag{11}$$

把零态线性与零输入线性的定义结合成线性定义，导致一般定义。

定义 4.4-3 系统 S 如果关于任一初态 x_0 是线性的：

$$S[\theta;k(u_1-u_2)]=kS(x_0;u_1)-kS(x_0;u_2) \tag{12}$$

又它是零输入线性的：

$$S(x_1+x_2;0)=S(x_1;0)+S(x_2;0) \tag{13}$$

则它是线性的。

线性性质的一个有用的推论说明在下面例子中。

例 4.4-2 线性系统的响应可表为两个响应，即由于输入 u_1 的响应与由于初始条件 x_0 的响应之和。为了验证这一点，考察(12)式，令 $u_2=0$ 及 $k=1$，得到

$$S(x_0;u_1)=S(x_0;\ 0)+S(\theta;u_1)$$

这就是所断言的。

例 4.4-2 中所说明的线性系统的性质在分析中是经常有用的。零态脉冲响应函数(也称权函数)及传递函数是在线性系统的文献中[Newton, Gould 与 Kaiser, 1957]经常出现的术语。在适当的时候将正式地定义这些函数。我们在这里断言：如果 $h(t,\xi)$ 是系统 S 的零态脉冲响应函数，则

$$S(\theta;u_1)=\int_{t_0}^{t} h(t,\xi)u_1(\xi)d\xi \tag{14}$$

这样，像例 4.4-2 所说明的，线性系统的标值响应可表示为

$$S(x_0;u)=S(x_0;0)+\int_{t_0}^{t} h(t,\xi)u(\xi)d\xi \tag{15}$$

我们将在§4.6 及第五章中更详细地阐明这个内容。

4.5. 时不变性

在很多工程文献中要找到时不变性的一个恰当又一致的定义

是较为困难的．假若我们只关心线性微分系统，如许多文献所做的，时不变性可以依据微分方程的系数来定义．如果微分方程的系数是常数，则此系统称为是时不变的．用对应的脉冲响应函数表示，时不变性由关系式[Brown 和 Nilsson，1962]

$$h(t,\xi)=h(t-\xi) \tag{1}$$

来定义．另一个经常引用的定义是：如果系统的输出与输入作用的时间无关，它是时不变的，即输出只依赖于引入输入与观察输出之间的时间区间而不依赖于输入的时间．事实上，这个定义就是(1)式所阐明的．

我们将给出时不变性的一个广泛且更明显的定义．在讨论线性性质时已指出过：虽然许多系统并不完全是线性的，但是用它们的近似式可以得到一些有用的知识．对于时不变系统有类似的情况．任何物理系统无疑会陈旧，所以它们的特征随着时间的推移将作理论上的改变．变化程度就是区分的一个重要特征．许多电子元件，例如电阻随着时间改变它们的特性．然而，这种改变通常是很小的使得可以忽略，至少可作为第一近似．

为要阐述时不变性的定义，我们定义平移或移位算子．算子是线性的，对它满足可加性与齐次性．作为记号，设 T_s 标志一个算子，它把一函数沿时间轴平移或移位总量 $t=s$，如图 4.5-1 所示．如图所示，移位算子 T_s 把时间函数 $u(t)$ 滞后 s 正时间单位．

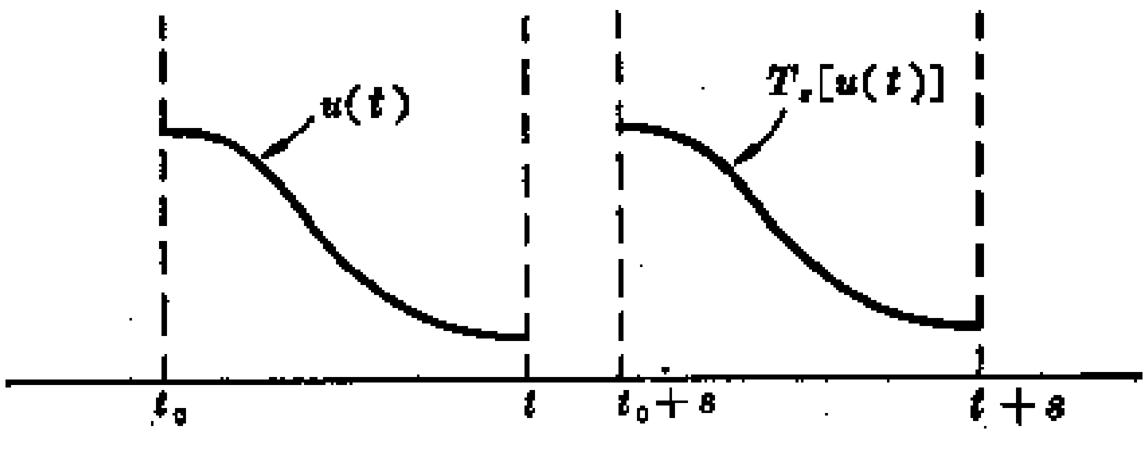


图 4.5-1 平移的时间函数 $u(t)$。

现在叙述时不变性的两个类型．这两个类型就是零态时不变

性，它对应于常规定义，以及零输入时不变性，它们同线性性质讨论中的两个定义相当。

粗略地说，系统 S 如果其零态响应的"形状"只依赖输入 u 的形式而不依赖于 u 作用的时间，它是零态时不变的。用记号表示，如果

$$\mathbf{S}[\theta;\mathbf{T}_s(\mathbf{u})]=\mathbf{T}_s[\mathbf{S}(\theta;\mu)] \tag{2}$$

系统是零态时不变的。(2)式的左边是输入 u 移位后的响应，右边是未移位输入 u 的移位响应。(2)式图解说明在图 4.5-2 中。

例 4.5-1 例 4.3-3 中的 RC 回路有零态响应

$$x(t)=\int_{t_0}^{t}\exp(\xi-t)u(\xi)d\xi \tag{3}$$

其中已设 $R=C=1$。(2)式的左边首先把输入平移一个正量 s 而得到。于是

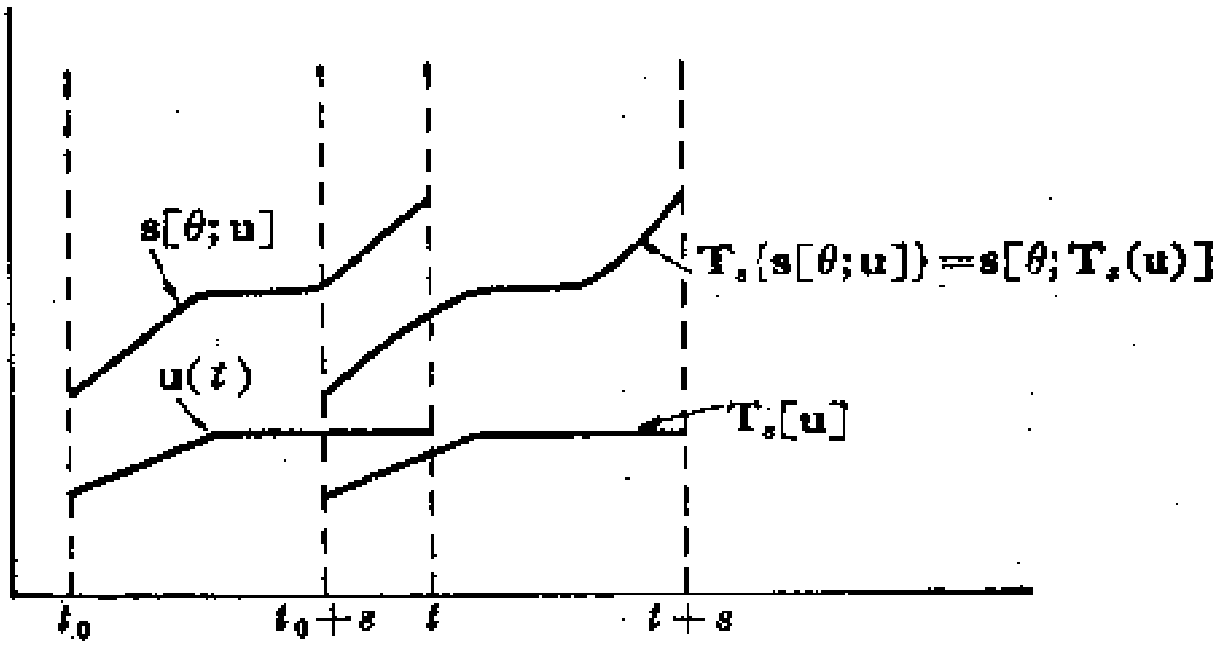


图 4.5-2 (4.5-2)式的图解说明.

在滞延时间区间上的响应可由在区间$(t_0+s,t+s)$上积分而得到。得到的响应是

$$\int_{t_0+s}^{t+s}\exp[\xi-(t+s)]u(\xi-s)d\xi \tag{4}$$

另一方面，(2)式的右边可由(3)式改变积分变量而得到。如果用新变量 $\xi'=\xi+s$，在(3)式作变量变换就得到(4)式。所以 RC 电路是零态时不变的。

用一阶微分方程

$$\frac{dy}{dt}+y=tu \tag{5}$$

所描述的系统不是零态时不变的．如方程(5)所指出的，系统作用在输入 u 上是用时间 t 乘以 u．此系统的零态响应是

$$y(t)=\int_{t_0}^{t}\exp(\xi-t)\xi u(\xi)d\xi \tag{6}$$

如果平移 $u(\xi)$ 一个正量 s，且在时间区间 $(t_0+s,t+s)$ 计算响应，则有结果

$$y(t)=\int_{t_0+s}^{t+s}\exp[\xi-(t+s)]\xi u(\xi-s)d\xi \tag{7}$$

另一方面，当作如在例 4.5-1 中的变量变换 $\xi'=\xi+s$ 时，此结果与(7)式不一样．

我们将给出时不变性的其它例子，但是首先要定义零输入时不变性．用符号表示，系统 S 如果

$$\mathbf{S}[\mathbf{x}(t_0-s);\mathbf{0}]=\mathbf{T}_s\{\mathbf{S}[\mathbf{x}(t_0);\mathbf{0}]\} \tag{8}$$

它是零输入时不变的．用话来说，(8)式说明零输入响应的形状经过平移是不改变的．例 4.3-3 中的 RC 电路是零输入时不变系统的例证．考察其零输入响应

$$x(t)=x(t_0)\exp\left(\frac{t_0-t}{RC}\right) \tag{9}$$

系统从时间 t_0-s 开始的零输入响应是

$$x(t)=x(t_0-s)\exp\left[\frac{(t_0-s)-t}{RC}\right] \tag{10}$$

(9)与(10)在总量 $t=s$ 范围内的平移是恒等的．(11)式表示一个假设的系统的零输入响应，它显然不是零输入时不变的：

$$y(t)=ty(t_0) \tag{11}$$

因为从 t_0-s 开始的 S 的零输入响应是

$$y(t)=ty(t_0-s)$$

它与(11)的差别不仅是一个平移．

现在给出时不变性的一个一般定义．这个定义是足够一般的，它包含零态与输入态两种时不变性[Zadeh 和 Desoer，1963]．

定义 4.5-1 系统称为是时不变的，如果对一切初态 $\mathbf{x}(t_0)$ 下列关系式成立

$$\mathbf{T}_s[\mathbf{S}(\mathbf{x}_0;\mathbf{u})]=\mathbf{S}[\mathbf{x}_0;\mathbf{T}_s(\mathbf{u})] \qquad (12)$$

4.6. 脉冲响应与传递函数

在这一节要给脉冲响应与传递函数扼要而足够的讨论。我们将把这些思想与概念安排成状态空间记号。讨论首先限于单输入单输出系统。这些系统是工程文献中经常出现的。在以后的章节中讨论更一般的系统。要提醒读者，传递函数在分析时不变线性系统中几乎是专用的。由于这个理由，我们把注意力集中于这样的系统。传递函数在分析中的重要性以及在设计中更重要是在于它们可用正弦稳态测量法确定[Clark，1962]。这就是说，如果一个系统是稳定的，则它的正弦响应提供它的增益以及相特征的一个度量。因而传递函数是一个有效的设计工具。

在(4.4-14)式中已给出系统的零态响应为

$$y(t)=S(\theta;u)=\int_{t_0}^{t}h(t,\xi)u(\xi)d\xi \qquad (1)$$

脉冲响应是依据这个关系式定义的。稍许离题，先建立一些记号。单位脉冲函数或德尔塔函数记作

$$\delta(t-t_0)\triangleq\begin{cases}\text{无定义}, & t=t_0\\ 0, & t\neq t_0\end{cases}$$

及

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)dt=1$$

单位阶跃函数 $1(t-t_0)$ 定义为

$$1(t-t_0)\triangleq\int_{-\infty}^{t}\delta(t-t_0)dt$$

其中

$$1(t-t_0)=\begin{cases}0, & t<t_0\\ \frac{1}{2}, & t=t_0\\ 1, & t>t_0\end{cases}$$

单位脉冲的 i 阶导数记作 $\delta^{(i)}(t-t_0)$。首阶导数称为是二重子，二阶导数是三重子等等。脉冲函数的"过滤"性质由下列运算得出。设 I 表示积分

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x-x_0)dx$$

于是得到

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x-x_0)dx=f(x_0) \tag{2}$$

按照这些题外的预备知识，脉冲响应函数正式定义为 S 对单位脉冲的零态响应。用符号表示，脉冲响应是从(1)式作用一个单位脉冲函数 $\delta(t-\gamma)=u(t)$ 得到的。利用过滤性质(2)，把单位脉冲函数代入(1)，得

$$\int_{t_0}^{t}h(t,\xi)\delta(\xi-\gamma)d\xi=\begin{cases}h(t,\gamma), & t\geqslant\gamma\geqslant t_0\\ 0, & \gamma>t\geqslant t_0\end{cases}$$

下面的例子说明建立动态系统脉冲响应的一个解析方法。

例 4.6-1 考察由微分方程

$$a(t)\frac{dy}{dt}+y=f$$

所描述系统的脉冲响应函数。利用标准的积分因子[Wylie，1966]

$$w(t,t_0)=\exp\left[\int_{t_0}^{t}\frac{dx}{a(x)}\right]$$

来解这类微分方程，改写

$$\frac{d}{dt}[w(t,t_0)y(t)]=\frac{f(t)}{a(t)}w(t,t_0)$$

由此得出零态响应是

$$y(t)=\frac{1}{w(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}\frac{w(\xi,t_0)}{a(\xi)}f(\xi)d\xi$$

为求脉冲响应，可设输入$f(t)$是德尔塔函数$\delta(t)$。利用过滤积分，我们得到脉冲响应

$$h(t,\gamma)=\begin{cases}\dfrac{1}{w(t,t_0)}\left[\dfrac{w(\gamma,t_0)}{a(\gamma)}\right], & t>\gamma\\ \dfrac{1}{a(\gamma)}\exp\left[-\int_{\gamma}^{t}\dfrac{d\tau}{a(\tau)}\right], & t>\gamma\\ 0, & t<\gamma\end{cases}$$

注意到如果$a(t)$是一个常数c，则

$$h(t,\gamma)=\begin{cases}h(t-\gamma)=\dfrac{1}{c}\exp\dfrac{\gamma-t}{c}, & t>\gamma\\ 0, & t<\gamma\end{cases}$$

在例 4.5-1 中，脉冲响应容易被建立为

$$h(t-\gamma)=\begin{cases}e^{\gamma-t}, & t>\gamma\\ 0, & t<\gamma\end{cases}$$

这个例子中的系统也可证明它是零态时不变的．象在§4.5开始时所指出的，时不变性有时依据脉冲响应来定义．现在可以正式地说：线性系统如果它的脉冲响应$h(t,\gamma)$取$h(t-\gamma)$的形式，它是零态时不变的．利用此定义看到例 4.6-1 中的系统当$a(t)$是常量时是零态时不变的．

时不变系统的传递函数定义为零态脉冲响应的拉氏变换式，即

$$H(s)\triangleq\int_0^{\infty}h(t)e^{-st}dt$$

我们将在第五章再一次讨论传递函数．以下列出一些常用的基本性质来结束这一节里简要的讨论．

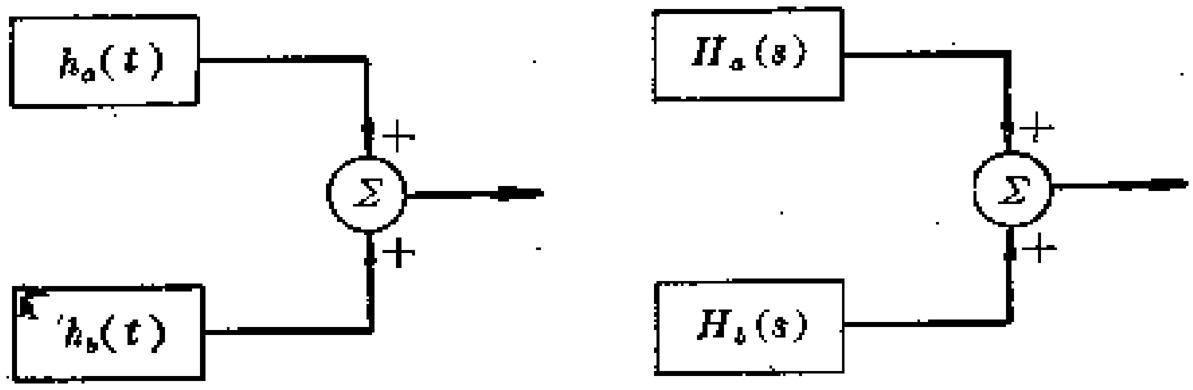
1．两个系统和的脉冲响应(见图 4.6-1)是各个脉冲响应的和

$$h_s(t)=h_a(t)+h_b(t)$$

2．两个系统乘积的脉冲响应(见图 4.6-2)由

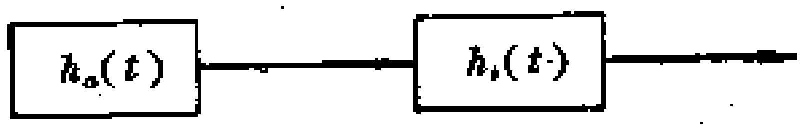
$$h_p(t)=\int_0^t h_a(t-\lambda)h_b(\lambda)\,d\lambda$$

给出，它是一个卷积积分[wylie,1966]。

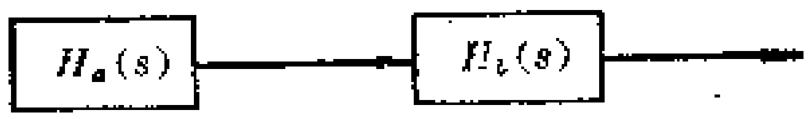


和 $=h_a(t)+h_b(t)$　　和 $=H_a(s)+H_b(s)$

图 4.6-1　脉冲响应的和与传递函数.



乘积 $=h_a(t)*h_b(t)=$ 卷积



乘积 $=H_a(s)H_b(s)$

图 4.6-2　脉冲响应的乘积与传递函数.

3. 两个系统和的传递函数是

$$H_s(s)=H_a(s)+H_b(s)$$

4. 两个系统乘积的传递函数是

$$H_p(s)=H_a(s)H_b(s)$$

4.7. 状态方程

这一节的目标是说明对一个系统配以状态矢量的方法并建立关联的状态方程. 我们将仅仅处理由单个微分方程所描述的系统. 这些系统对我们是最熟悉的，从而可作为一个很好的起点. 在§4.8中将扼要地指出如何推广这些概念到多输入多输出系统

上去.

如在§4.2所指出的，与状态变量关联的包含三个组成部分，即系统、初始条件和激励函数. 扼要重述一下，状态的定义指出，如果 $\mathbf{x}(t)$ 是系统的一个状态矢量，则

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{F}(\mathbf{x}_0;\mathbf{u}) \tag{1}$$

其中 $\mathbf{F}$ 是其变元的单值函数，即状态 $\mathbf{x}(t)$ 对 $\mathbf{x}_0$ 与 $\mathbf{u}$ 分别在状态空间与输入空间中在任一时刻 $t\geqslant t_0$ 是唯一确定的. 此外，系统的输出 $\mathbf{y}$ 是

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{S}(\mathbf{x}_0;\mathbf{u}) \tag{2}$$

其中 $y(t)$ 也是由 $\mathbf{x}_0$ 与 $\mathbf{u}$ 唯一确定的. 对于定义及一个系统配以状态矢量的过程，今通过二阶时不变线性微分方程

$$a\ddot{y}+b\dot{y}+cy=u \tag{3}$$

说明之. 如这个方程所指出的，系统有单输入 u 及单输出 y. 从微分方程理论知道，$y(t)$ 是由输入 u 及初始条件 $\dot{y}_0$ 与 y_0 完全确定的. 因此，如果设 $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$ 是列矢量

$$\mathbf{x}_0=\begin{bmatrix} y_0 \\ \dot{y}_0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

则输出 $y(t)$ 是由 $\mathbf{x}_0$ 及 u 唯一确定的①. 这就是说，输出

$$y(t)=S(\mathbf{x}_0;u) \tag{5}$$

是变元 $\mathbf{x}_0$ 与 u 的单值函数. 这就指出

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}$$

具有状态矢量的资格. 为了缩短记号，我们省去时间变元 t 而写

$$\begin{aligned} x_1&=y \\ x_2&=\dot{y} \end{aligned} \tag{6}$$

① 线性微分方程解的唯一性在第五章中讨论.

关于时间微分这些方程得到方程组

$$\dot{x}_1=\dot{y}=x_2 \tag{7}$$

$$\dot{x}_2=\ddot{y} \tag{8}$$

以方程(3)代入$\ddot{y}$，得

$$\dot{x}_2=\frac{u}{a}-\frac{b}{a}x_2-\frac{c}{a}x_1 \tag{9}$$

联结方程(7)、(8)与(9)，得到方程

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}u \tag{10}$$

其中

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{c}{a} & -\dfrac{b}{a} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{a} \end{bmatrix} \tag{11}$$

方程(10)是一个一阶矢量微分方程，它的解在第五章中讨论．解$\mathbf{x}(t)$由$\mathbf{x}_0$与u唯一确定．依据方程(1)

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{F}(\mathbf{x}_0;u)$$

函数$\mathbf{F}$是其变元的单值函数．与前面例子关联的输出方程是

$$y(t)=\mathbf{C}\mathbf{x}(t) \tag{12}$$

其中输出矩阵$\mathbf{C}$是

$$\mathbf{C}=[1 \quad 0]$$

方程(10)与(12)是关联方程(3)的微分系统的状态方程．注意这些方程与方程(4.2-5)及(4.2-6)有相同的形式，后者表示线性微分系统更一般的情况．

我们断言[Zadeh 和 Desoer，1963]，如果状态方程是微分形式

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t) \tag{13}$$

$$\mathbf{y}=\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{u},t) \tag{14}$$

使得方程(13)对 $\mathbf{x}$ 有唯一解，则 $\mathbf{x}$ 具有状态矢量的资格。如第五章要讨论的，由状态方程

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u} \tag{15}$$

$$\mathbf{y}=\mathbf{C}\mathbf{x}+\mathbf{D}\mathbf{u} \tag{16}$$

所表征的线性微分系统对 $\mathbf{x}$ 经常有一个唯一解。方程(15)与(16)称为线性系统的标准状态方程。在第五章中要证明如果线性微分系统的状态方程能写成标准形式，则 $\mathbf{x}$ 可作为一个状态矢量。在这一节及今后的节次中将说明求标准方程的方法。

为了说明 $\mathbf{x}(t)$ 的选取不是唯一的，设想初态矢量确定为

$$\mathbf{x}_0=\begin{bmatrix} ay_0 \\ a\dot{y}_0+by_0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

由于 $\mathbf{x}_0$ 的这个表示法，状态变量对任何时刻 t 成为

$$x_1=ay \quad x_2=a\dot{y}+by$$

输出矩阵容易决定成为

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \end{bmatrix}$$

状态变量这样选取所对应的矩阵微分方程的推导留给读者。读者并应当把所得的标准方程与由(11)所定的那个方程加以比较。

互反微分系统

紧接着关心的是推广前面的讨论到 n 阶线性微分系统。我们定义由微分方程

$$a_n\frac{d^n y}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_0 y=u \tag{18}$$

所描述的系统为一个互反微分算子系统。与此系统相对比的是由微分方程

$$y=b_m\frac{d^m u}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}}+\cdots+b_0 u \tag{19}$$

所描述的微分算子系统．设 $p=\frac{d}{dt}$，并定义微分算子

$$L(p)=a_n p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_0 \tag{20}$$

$$M(p)=b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}+\cdots+b_0 \tag{21}$$

这样，方程(18)与(19)简化为

$$L(p)y=u$$

$$y=M(p)u$$

现在把系统 $L(p)y=u$ 配以状态矢量．设想如(6)式那样选取状态变量，并推广到 n 维去．

定义状态变量 $x_i(t)$ 为

$$\begin{aligned}x_1&=y\\x_2&=\frac{dy}{dt}\\&\cdots\cdots\\x_n&=\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\end{aligned} \tag{22}$$

于是，进行微分，得到

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=\frac{dy}{dt}=x_2\\\dot{x}_2&=\frac{d^2y}{dt^2}=x_3\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\\dot{x}_n&=\frac{d^ny}{dt^n}=-\frac{1}{a_n}(a_0x_1+\cdots+a_{n-1}x_n)+\frac{u}{a_n}\end{aligned} \tag{23}$$

在矩阵记号下，这个方程组成为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}&=\mathbf{Ax}+\mathbf{Bu}\\y&=\mathbf{Cx}\end{aligned} \tag{24}$$

其中

$$
\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\cdots 0 \\ 0 & 0 & 1\cdots 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ -\frac{a_0}{a_n} & \cdots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}=[1 \ 0\cdots 0] \tag{25}
$$

注意到状态矢量是 n 维的，因而 $\mathbf{x}$ 变化的状态空间是 R^n(或 C^n). 在第五章中将全面讨论这些系统的性质. 然而要指出这个系统的阶数是 n，并且状态矢量不论怎样定义，状态空间的维数是 n。

虽然在方程(18)或(20)中无疑地了解其系数 a_i 为常数，但这是不需要的. 由配以状态矢量的经验，由(22)所定义的矢量，即使 $a_i=a_i(t)$，也显然确实是一个状态矢量. 从(22)开始依次得到

$$
\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}+\mathbf{B}(t)u \tag{26}
$$

$$
y=\mathbf{C}(t)\mathbf{x} \tag{27}
$$

其中 $\mathbf{A}(t)$ 相同于 (25) 中的矩阵，只是把 a_i 换为 $a_i(t)$。$\mathbf{B}(t)$ 与 $\mathbf{C}(t)$ 也是这样。

互反微分系统的一个特殊情况是积分器

$$
(p+a)y=u \tag{28}
$$

a 的倒数 $\frac{1}{a}$ 是积分器的时间常数. 当 $a=0$ 时，这是一个理想积分器. 显然，积分器系统的阶数为 1，因而一个变量足够描述其状态. 图 4.7-1 描述积分器的流图. 如图中所示，状态矢量（标量）x 被定义为积分器的输出. 这就是说，状态变量 x 必需形如 $x=ky$，其中 k 是一个常量. 分别在点 1 与 2 写出流图的方程就给出状态方程

$$\dot{x}=-ax+u \quad y=x \tag{29}$$

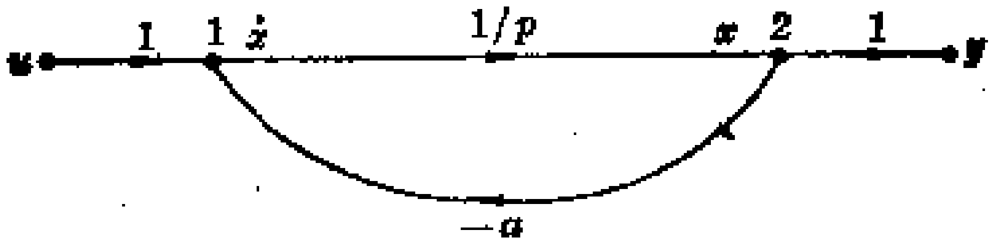


图 4.7-1 积分器的流图.

如前面指出并说明的，状态矢量的选取不是唯一的。为了进一步说明之，设想不用(22)的状态矢量，而选状态矢量 $\mathbf{x}'$，其状态变量为

$$\begin{aligned} x_1' &= \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \\ x_2' &= \frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' &= y \end{aligned} \tag{30}$$

于是应得到状态方程

$$\dot{\mathbf{x}}'=\mathbf{A}'\mathbf{x}'+\mathbf{B}'u \tag{31}$$

$$y=\mathbf{C}'\mathbf{x}' \tag{32}$$

这里我们留给读者去验证

$$\mathbf{A}'=\begin{bmatrix} -\frac{a_{n-1}}{a_n} & \cdots\cdots & & -\frac{a_0}{a_n} \\ 1 & 0 & 0\cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0\cdots & \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\cdots 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}'=\begin{bmatrix} \frac{1}{a_n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}'=[0\cdots 0 \ \ 1] \tag{33}$$

显然(22)的状态矢量 x 与(30)的状态矢量 x′ 是由矩阵关系

$$\mathbf{x}=\mathbf{T}\mathbf{x}' \tag{34}$$

联系起来的。其中 T 是 $n\times n$ 非奇矩阵

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix} 0\cdots 0 & 1 \\ 0\cdots 1 & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots \\ 1\ 0\ 0\cdots & \end{bmatrix} \tag{35}$$

把 $\mathbf{x}=\mathbf{T}\mathbf{x}'$ 代入 x 的状态方程[方程(24)],得到

$$\dot{\mathbf{x}}'=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{x}'+\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}u \tag{36}$$

$$y=\mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{x}' \tag{37}$$

把方程(36)、(37)中的矩阵和方程(31)、(32)中的对应矩阵相比较,有

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{C}' &= \mathbf{C}\mathbf{T} \end{aligned} \tag{38}$$

我们所建立的主要是:对 n 阶系统配以状态矢量的方法是很多的。然而不同的方法相当于在状态空间 R^n 或 C^n 中指定不同的变量。这就是说,状态矢量是由一一线性映射联结起来的。用符号表示为

$$\mathbf{x}=\mathbf{T}\mathbf{x}'$$

其中 T 是一个 $n\times n$ 非奇常数矩阵。

用流图的积分器配置状态变量有时是方便的。特别,图 4.7-2 中的流图是一个例子,它是像(22)所定义的那样来选择状态变量的。如图 4.7-2 所示,流图是由加法器,用 $a_i=a_i(t)$表示的标量及用符号$\frac{1}{p}$表示的纯积分器联结成的。状态变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 被表示为 n 个积分器的输出。在记号上为了区分这 n 个积分器,

我们指明第 i 个积分器关联着第 i 个状态变量。例如，第二个积分器以 x_2 作为它的输出。

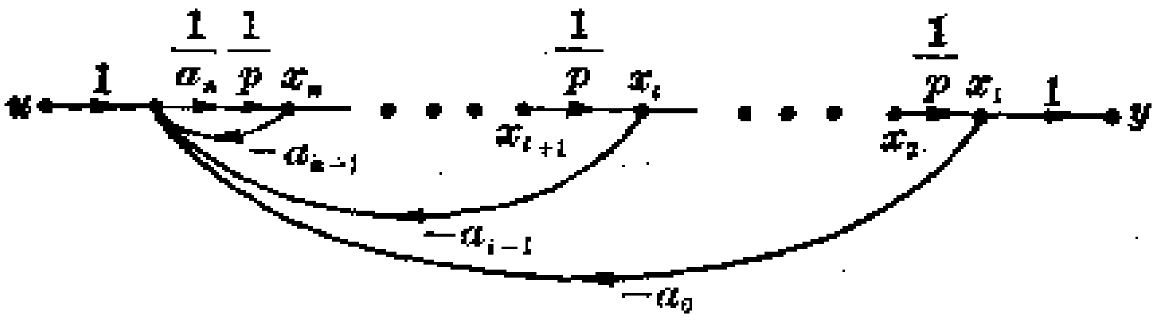


图 4.7-2 互反微分算子系统的流图.

我们断言对互反微分系统状态矢量可以用流图中每一积分器的输出配置一个状态变量来建立。注意到(30)中的状态变量容易关联到流图中去。(30)中的状态变量是由从左到右计数积分器而得到的，但不是如图 4.7-2 的从右到左。下面的例子说明这个想法。

例 4.7-1 考察三阶线性时不变微分系统

$$(p^3+6p^2+11p+6)y=u \tag{39}$$

为要说明所讨论的方法，我们研究此系统的各种表示法，同(22)相一致，可定义状态矢量为

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} \tag{40}$$

这时状态方程成为

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}u$$
$$y=\mathbf{C}\mathbf{x}$$

根据(25)，这里

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix},\quad \mathbf{B}^T=[0\ \ 0\ \ 1],\quad \mathbf{C}=[1\ \ 0\ \ 0] \tag{41}$$

(41)的状态矢量的流图描述为图 4.7-3。

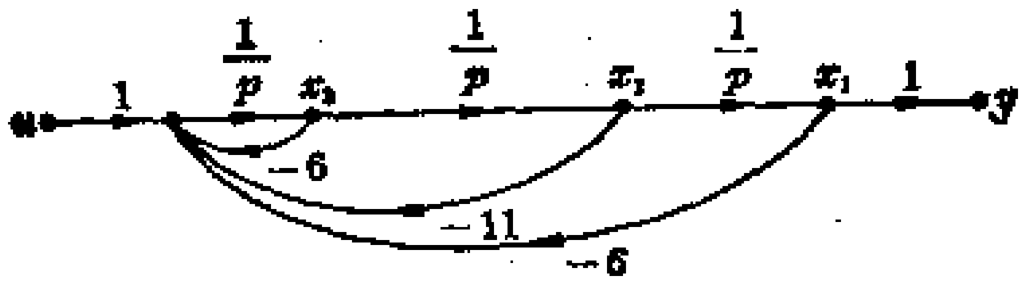


图 4.7-3 例 4.7-1 的第一个流图.

今考察另一途径。因为

$$p^3+6p^2+11p+6=(p+1)(p+2)(p+3) \tag{42}$$

由此可得部分分式展开

$$\frac{1}{p^3+6p^2+11p+6}=\frac{\frac{1}{2}}{p+1}-\frac{1}{p+2}+\frac{\frac{1}{2}}{p+3}$$

这个展开式提供图 4.7-4 的流图，于三个积分器的输出配以状态变量可导出状态方程

$$\begin{aligned} \dot{x}_1&=-x_1+\frac{1}{2}u \\ \dot{x}_2&=-2x_2-u \\ \dot{x}_3&=-3x_3+\frac{1}{2}u \\ y&=x_1+x_2+x_3 \end{aligned} \tag{43}$$

把这些方程写成矩阵形式，有

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}&=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}u \\ y&=\mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \tag{44}$$

其中

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix},\quad \mathbf{B}^T=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=[1\quad 1\quad 1] \tag{45}$$

状态矢量的后一选取法显然是合乎需要的一个，因为矩阵 $\mathbf{A}$是对角形的.此方程组的解可由解方程组（43）中的三个标量一阶微分方程而得到。在今后将会更多地说到状态变量的这个选法以及其它相似的选法。

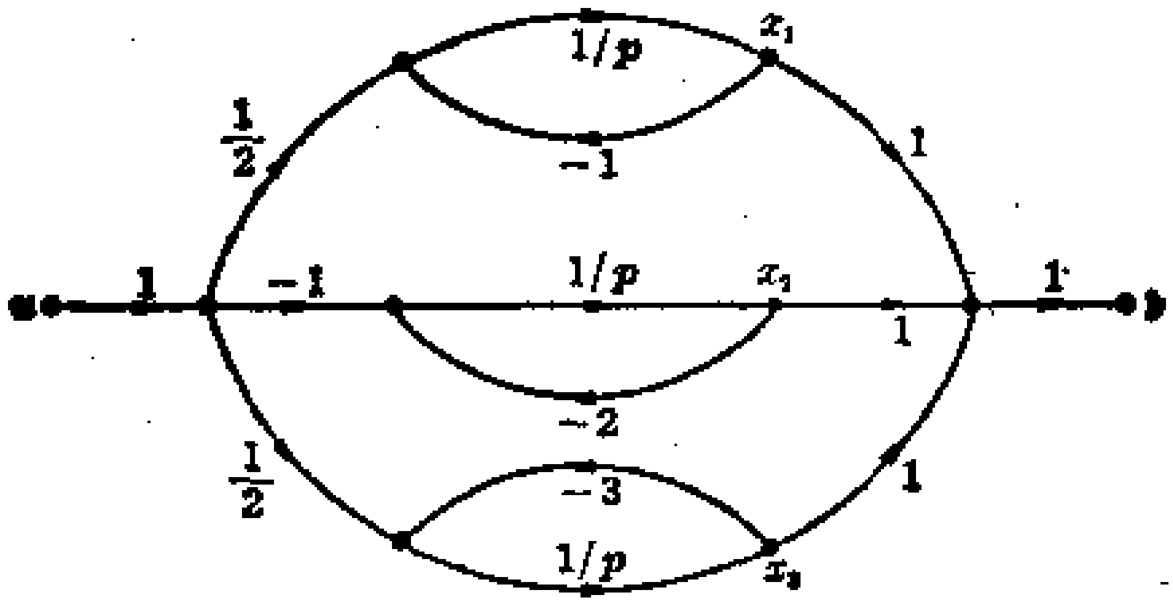


图 4.7-4 例 4.7-1 的第二个流图.

系统的再一个显然的流图表示在图 4.7-5 中。如图所指示的标出积分器的输出作为状态变量，得到下列状态方程组

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_1 + u \\
\dot{x}_2 &= -2x_2 + x_1 \\
\dot{x}_3 &= -3x_3 + x_2 \\
y &= x_3
\end{aligned}
\tag{46}
$$

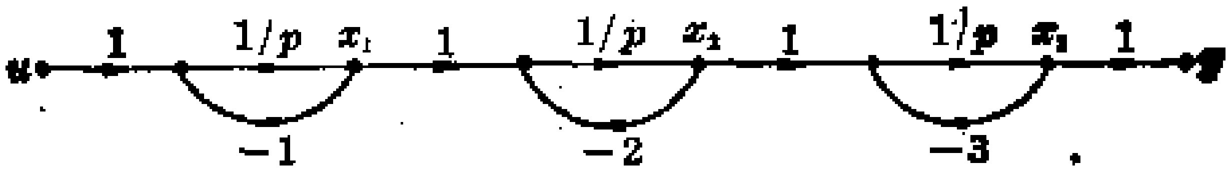


图 4.7-5 例 4.7-1 的第三个流图.

一般微分算子系统

现在研究一般系统

$$L(p)y = M(p)u \tag{47}$$

从(20)及(21)回忆到 $L(p)$ 的阶为 n 而 $M(p)$ 的阶为 m。一个系统当 $m \leqslant n$ 时，称为正常的；当 $m \leqslant n-1$ 时，称为严格正常的；当 $m > n$ 时，称为非正常的。依据传递函数

$$H(s) = \frac{M(s)}{L(s)}$$

正常系统可能有相等个数的有限极点与零点，而严格正常系统有限极点的个数超过零点的个数，又非正常系统有限零点的个数超

过极点的个数．依据脉冲响应，正常系统含有一个脉冲函数，严格正常系统不含有脉冲函数而非正常系统含有脉冲函数、二重子以及高阶脉冲函数．许多物理系统或者是严格正常的或者是正常的，因而将不考虑非正常系统．注意到状态方程(4.2-5)及(4.2-6)一般表示正常系统．其次，如果 D＝0，则方程表示严格正常系统．为了说明正常系统及指定状态变量的方法，考察方程

$$(p^2+a_1p+a_0)y=(b_2p^2+b_1p+b_0)u \tag{48}$$

为了对这个系统配以状态矢量，我们可思考如下：假若 u 为零，我们可取状态变量如(22)，适当的流图如图 4.7-2 所给的结构．将图 4.7-2 的基本结构应用于方程(47)的系统，特别是，方程(48)的系统这个要求似乎是合理的．方程(48)的系统与互反微分系统的不同只在于激励函数 u 如何进入系统．图 4.7-6 指出一个流图，它有图 4.7-2 的基本结构．在图 4.7-6 中，输入 u 在三个点处进入系统．我们可求出常数 α 与 β 使得图 4.7-6 确是表示方程(48)的系统．

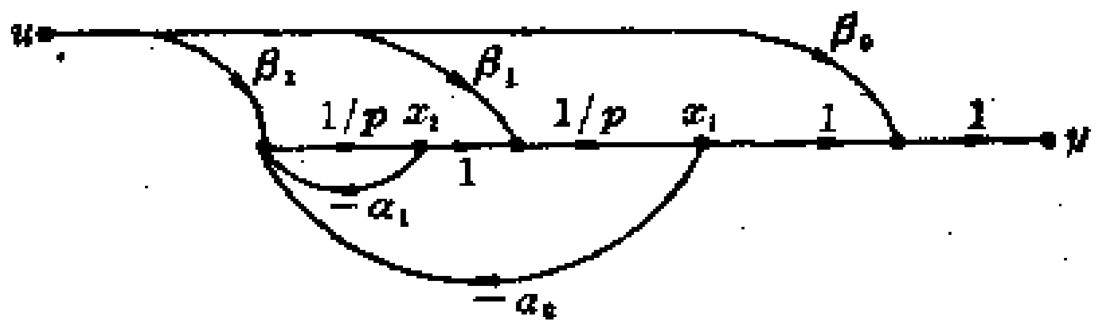


图 4.7-6　例 4.7-2 的流图．

用 x_1 与 x_2 表示的状态变量取作积分器的输出如图所示．于是可以写出方程

$$\begin{aligned} y&=x_1+\beta_0u \\ \dot{x}_1&=x_2+\beta_1u \\ \dot{x}_2&=-a_0x_1-a_1x_2+\beta_2u \end{aligned} \tag{49}$$

对 y 对导数，得到方程

$$py=\dot{x}_1+\beta_0pu$$

用 $\dot{x}_1$ 的表达式代入，得

$$py=x_2+\beta_1 u+\beta_0 pu$$

又二阶导数

$$p^2y=\dot{x}_2+\beta_1 pu+\beta_0 p^2u$$

用 $\dot{x}_2$ 的表达式代入，得

$$p^2y=-\alpha_0 x_1-\alpha_1 x_2+\beta_2 u+\beta_1 pu+\beta_0 p^2u$$

为要求出 α_i 与 β_i，把 y，py 及 p^2y 代入方程(48)，经过整理之后，得到

$$(a_0-\alpha_0)x_1+(a_1-\alpha_1)x_2+(\beta_2+a_1\beta_1+a_0\beta_0)u+$$
$$+(\beta_1+a_1\beta_0)pu+\beta_0 p^2u$$

比较此式与方程(48)右边的系数导出条件

$$a_0=\alpha_0,\qquad a_1=\alpha_1 \tag{50}$$

$$\begin{aligned}\beta_0&=b_2\\ \beta_1&=b_1-a_1\beta_0\\ \beta_2&=b_0-a_1\beta_1-a_0\beta_0\end{aligned} \tag{51}$$

注意到关系式(51)可写成矩阵形式如下：

$$\begin{bmatrix}b_2\\ b_1\\ b_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ a_1 & 1 & 0\\ a_0 & a_1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix} \tag{52}$$

由(52)式经常可以求解(求逆)来决定 β_i，又由(50)直接给出 α_i。因此图 4.7-6 的流图提供表出正常系统的一个方法。下面的例子说明前面的想法。

例 4.7-2 考察正常系统

$$(p+3)(p+1)y=(p+2)(p+4)u$$

或

$$(p^2+4p+3)y=(p^2+6p+8)u \tag{53}$$

如果按照图 4.7-6 定义状态变量并且把方程(48)的系数配以方程(53)的系数，得 $a_1=\alpha_1=4$，$a_0=\alpha_0=3$。对应于(52)的矩阵方程是

$$\begin{bmatrix}1\\6\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&0\\3&4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_0\\\beta_1\\\beta_2\end{bmatrix}$$

这个方程是容易求解的，且有解 $\beta_0=1, \beta_1=2, \beta_2=-3$。

用矩阵记号，状态方程(49)成为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-3&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}u$$

$$y=[1\quad 0]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+u$$

这些方程是标准形式

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}u$$

$$y=\mathbf{C}\mathbf{x}+\mathbf{D}u$$

像前面所说的，可导致标准方程的一个矢量有充当状态矢量的资格。因此，对正常系统得到了配以状态矢量的一个方法。此外，我们断定状态空间是二维的。为了推广前面的概念，考察图 4.7-7 的流图。这个流图指出了 n 阶正常系统

$$(p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_0)y=(b_np^n+b_{n-1}p^{n-1}+\cdots+b_0)u \tag{54}$$

的结构。其中任意地令 $a_n=1$ 以简化结果。这样做不会失去一般性，因为要定义系数使得 $a_n=1$ 是经常可能的。

如图 4.7-7 所示，在画图时已推广(50)的结果 $\alpha_i=a_i$。由于流图的帮助容易写出下列方程

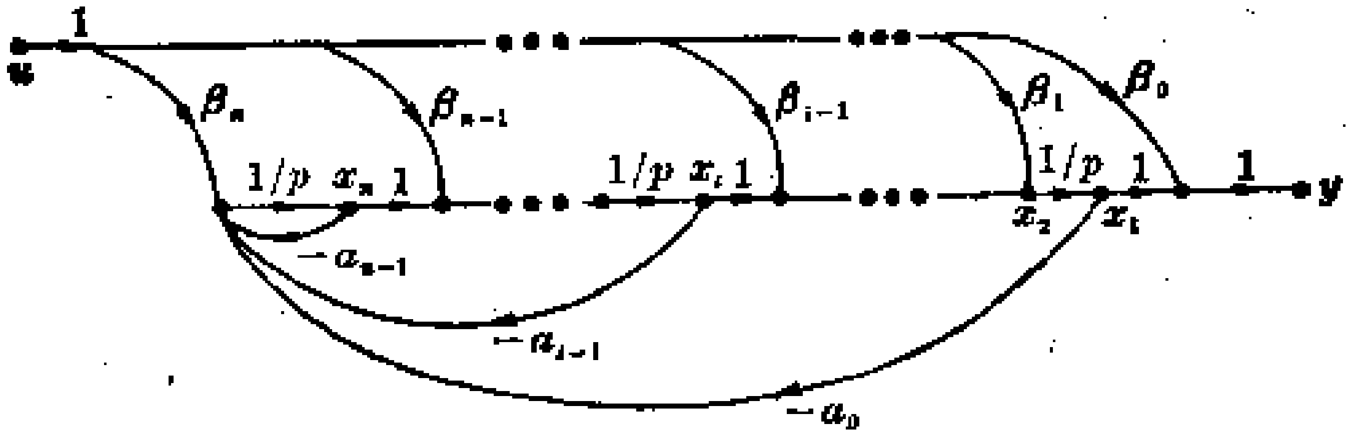


图 4.7-7 正常系统的流图。

$$
\begin{aligned}
y &= x_1 + \beta_0 u \\
\dot{x}_1 &= x_2 + \beta_1 u \\
&\cdots\cdots \\
\dot{x}_i &= x_{i+1} + \beta_i u \\
&\cdots\cdots \\
\dot{x}_n &= -(a_0 x_1 + a_1 x_2 + \cdots + a_{n-1} x_n) + \beta_n u
\end{aligned}
\tag{55}
$$

微分 y，有

$$
py = \dot{x}_1 + \beta_0 pu = x_2 + \beta_1 u + \beta_0 pu \tag{56}
$$

继续这个过程，可建立下列方程

$$
\begin{aligned}
p^2 y &= x_3 + \beta_2 u + \beta_1 pu + \beta_0 p^2 u \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
p^{n-1} y &= x_n + \beta_{n-1} u + \beta_{n-2} pu + \cdots + \beta_0 p^{n-1} u \\
p^n y &= -(a_0 x_1 + a_1 x_2 + \cdots + a_{n-1} x_n) + \beta_n u + \beta_{n-1} pu \\
&\quad + \cdots + \beta_0 p^n u
\end{aligned}
\tag{57}
$$

把(56)式与(57)式代入方程(54)，并比较系数，求得

$$
\begin{bmatrix} b_n \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \tag{58}
$$

因为(58)式中的矩阵是三角形的，能容易地相继求出 β_i。例如，有(还可见习题 4.39)

$$
\begin{aligned}
\beta_0 &= b_n \\
\beta_1 &= b_{n-1} - a_{n-1} b_n \\
\beta_2 &= b_{n-2} - a_{n-2} b_n - a_{n-1}(b_{n-1} - a_{n-1} b_n)
\end{aligned}
\tag{59}
$$

状态方程是标准形式

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\
y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u
\end{aligned}
\tag{60}
$$

其中 A 与 C 由(25)式给出。矩阵D 简单地为标量$D=b_n$，而矩阵 B 为列矢量

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}$$

习题 4.38 中提供了系统 $L(p)y=M(p)u$ 的另一个实现，还有一个是由图 4.7-8 所示的流图提供的。注意到这个流图本质上是与图 4.7-2 相同的。差别在于输出 y 的结构。因此，如果我们定义状态变量为图中所示的积分器的输出，就得到标准方程

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}u$$

$$y=\mathbf{C}\mathbf{x}+\mathbf{D}u \tag{61}$$

其中 A 与 B如(25)所给出的。从流图

$$y=\frac{b_n}{a_n}u+\left(b_0-\frac{a_0b_n}{a_n}\right)x_1+\cdots+\left(b_{n-1}-\frac{a_{n-1}b_n}{a_n}\right)x_n \tag{62}$$

故

$$\mathbf{C}=\frac{1}{a_n}[a_nb_0-a_0b_n\cdots a_nb_{n-1}-a_{n-1}b_n],\ \mathbf{D}=\frac{b_n}{a_n} \tag{63}$$

部分分式展开

为了实现系统 $L(p)y=M(p)u$ 的其它形式，考察部分分式展开法。这个方法在实用上不是广泛受欢迎的，因为它涉及到多

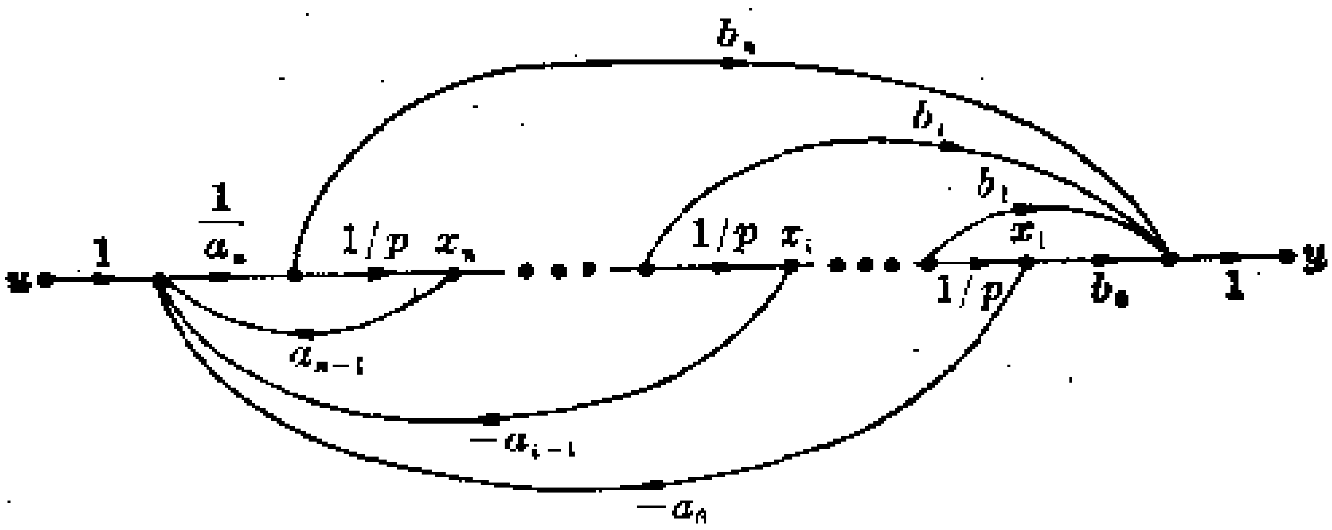


图 4.7-8 方程(4.7-47)的流图表示。

项式的分解因式．使用不同的术语，这就是要求系统矩阵的特征值．我们将结合这两个概念来进行．

首先假设 $L(p)$ 有相异根，并且 $M(p)$ 与 $L(p)$ 没有公因式．系统的传递函数可写成

$$H(s)=\frac{M(s)}{L(s)} \tag{64}$$

其中

$$\begin{aligned}L(s)&=a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0\\&=a_n(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n)\end{aligned} \tag{65}$$

此系统的部分分式展开应得出为

$$H(s)=\frac{c_1}{s-\lambda_1}+\frac{c_2}{s-\lambda_2}+\cdots+r_0 \tag{66}$$

其中 c_i 与 r_0 为常数．在例 4.7-1 中我们已做过一个与之相似的问题．图 4.7-4 表示对应的流图．如在那个例子中所指出的，部分分式展开导致(45)所给的对角形矩阵．所谓部分分式展开法在本质上提供的是系统矩阵 **A** 的对角形化．这就是设想取(41)中所定义的系统矩阵 **A** 并把它对角形化．具体地说，考察标准方程

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}&=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}u\\y&=\mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned} \tag{67}$$

其中 **A**,**B** 与 **C** 由(41)给出．我们的目标是定义一个新的状态矢量使得系统矩阵 **A**′成为对角形矩阵．考察状态变量的如(34)所提供的线性变换，并且利用(36)式与(37)式．这些方程指出新的系统矩阵是

$$\mathbf{A}'=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \tag{68}$$

如果矩阵 **A** 有相异特征值(它是简单结构的)，则它相似于对角形矩阵．换言之，存在一个非奇矩阵 T，使得

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}=\mathrm{diag}[\lambda_1,\ \lambda_2,\cdots,\lambda_n] \tag{69}$$

这里记号 diag$[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]$表示以 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$为对角线元素的对角形矩阵，$\lambda_i$ 是 A 的相异特征值。

回忆第三章，矩阵的对角形化需要确定它的特征值，又忆起相似矩阵有相同的特征方程。例如，考察(68)。

$$|\mathbf{A}'-\lambda\mathbf{I}|=|\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}-\lambda\mathbf{I}|=|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|$$

如果 A 由(25)给出，展开$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|$，求得

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_0$$

根据(65)，

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=L(\lambda)$$

这就是说，A 与 A′ 的特征值都等于算子 L 的根。在下面的例子中复习在第三章中已讨论过的对角形化方法。

例 4.7-3 考察状态方程(41)。作状态变量的变换使得新系统矩阵 A′ 是对角形的。换言之，把矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix} \tag{70}$$

对角形化。为了对角形化 A，求一个矩阵 T，使得(69)成立。T 的列矢量是A 的特征矢量。设 $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$ 与 $\mathbf{T}_3$ 是 A 对应于 A 的特征值 λ_1, λ_2 与 λ_3 的特征矢量。于是

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{T}_1&=\lambda_1\mathbf{T}_1\\ \mathbf{A}\mathbf{T}_2&=\lambda_2\mathbf{T}_2\\ \mathbf{A}\mathbf{T}_3&=\lambda_3\mathbf{T}_3\end{aligned} \tag{71}$$

这三个方程的矩阵形式就是

$$\mathbf{A}[\mathbf{T}_1\ \ \mathbf{T}_2\ \ \mathbf{T}_3]=[\mathbf{T}_1\ \ \mathbf{T}_2\ \ \mathbf{T}_3]\mathbf{D} \tag{72}$$

或

$$\mathbf{A}\mathbf{T}=\mathbf{T}\mathbf{D} \tag{73}$$

其中

$$\mathbf{D}=\mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$$

A 的特征方程是

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ 0 & -\lambda & 1\\ -6 & -11 & -6-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+6) \qquad (74)$$

注意到特征多项式与方程(39)中的算子多项式是相同的。故从例4.7-1得出 **A** 的特征值是 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$ 及 $\lambda_3=-3$。

A 的特征矢量由解线性方程组

$$(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})\mathbf{T}_i=0 \qquad (75)$$

而得到，对 $i=1,2,3$。对 $\lambda_1=-1$，有方程组

$$\begin{aligned} z_1+z_2 \qquad\quad &=0\\ z_2+z_3 \qquad\quad &=0\\ 6z_1+11z_2+5z_3&=0 \end{aligned} \qquad (76)$$

解之，得到 $\mathbf{T}_1=k_1[1\ \ -1\ \ 1]^T$ 是一个特征矢量，其中 k_1 是任意常数。特征矢量 $\mathbf{T}_2$ 与 $\mathbf{T}_3$ 可同样求之，它们是

$$\mathbf{T}_2=k_2\begin{bmatrix}1\\-2\\4\end{bmatrix},\qquad \mathbf{T}_3=k_3\begin{bmatrix}1\\-3\\9\end{bmatrix} \qquad (77)$$

为了方便，令 $k_1=k_2=k_3=1$。这样

$$\mathbf{T}=[\mathbf{T}_1\ \mathbf{T}_2\ \mathbf{T}_3]=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -2 & -3\\ 1 & 4 & 9\end{bmatrix}$$

及

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}$$

后者与(45)式一致。参看(37)，新输出矩阵应为 **CT**，其中 **C** 在这个例子由(41)给出为 $\mathbf{C}=[1\ \ 0\ \ 0]$，故

$$\mathbf{CT}=[1\ \ 1\ \ 1]$$

它也与(45)式一致。

部分分式展开法或矩阵的对角形化导致状态方程的所需的形式。如在以后各章中将要看到的，如果系统经常是对角形的，则我们的工作就容易的多。然而，如已经看到的，系统矩阵的对角形化

需要大量的计算．在许多情况，消耗于系统对角形化的努力是不可靠的．然而我们仍将推广以前的概念，因为这些结果在今后的工作中是有用的。

现在考察具有重极点的系统，也即多项式 $L(p)$ 有重零点．例如，考察

$$L(p)=(p-\lambda_1)^q(p-\lambda_{q+1})\cdots(p-\lambda_n) \tag{78}$$

传递函数是

$$H(s)=\frac{M(s)}{(s-\lambda_1)^q(s-\lambda_{q+1})\cdots(s-\lambda_n)} \tag{79}$$

$H(s)$的部分分式展开导致表达式

$$H(s)=\frac{c_1}{(s-\lambda_1)^q}+\frac{c_2}{(s-\lambda_1)^{q-1}}+\cdots+\frac{c_q}{s-\lambda_1}+\cdots+\frac{c_n}{s-\lambda_n}+r_0 \tag{80}$$

由方程

$$y=\frac{M(p)}{L(p)}u$$

看到

$$y=\frac{c_1}{(p-\lambda_1)^q}u+\frac{c_2}{(p-\lambda_1)^{q-1}}u+\cdots+\frac{c_q}{p-\lambda_1}u+\cdots+\frac{c_n}{p-\lambda_n}u+r_0u \tag{81}$$

因此我们令

$$y=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i+r_0u \tag{82}$$

其中

$$x_1=\frac{1}{(p-\lambda_1)^q}u$$

$$x_2=\frac{1}{(p-\lambda_1)^{q-1}}u$$

$$\cdots\cdots \tag{83}$$

$$x_q = \frac{1}{p-\lambda_1}u$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_n = \frac{1}{p-\lambda_n}u$$

注意到 x_i 之间的关系，看到

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{(p-\lambda_1)^q}u = \frac{1}{p-\lambda_1}x_2 \\
x_2 &= \frac{1}{(p-\lambda_1)^{q-1}}u = \frac{1}{p-\lambda_1}x_3 \\
&\cdots\cdots \\
x_q &= \frac{1}{p-\lambda_1}u \\
&\cdots\cdots \\
x_n &= \frac{1}{p-\lambda_n}u
\end{aligned}
\tag{84}
$$

方程(84)中的每一个都是一阶微分方程，即

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + x_2 \\
\dot{x}_2 &= \lambda_1 x_2 + x_3 \\
&\cdots\cdots \\
\dot{x}_q &= \lambda_1 x_q + u \\
&\cdots\cdots \\
\dot{x}_n &= \lambda_n x_n + u
\end{aligned}
\tag{85}
$$

将上面方程组写成矩阵记号，得到标准方程

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\
y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u
\end{aligned}
\tag{86}
$$

其中

$$
\mathbf{A}=\left[\begin{array}{cccc|cccc}
\multicolumn{4}{c|}{\overbrace{}^{q\times q}} & & & & \\
\lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & & & & \\
0 & \lambda_1 & 1 & \cdots & & \mathbf{0} & & \\
0 & 0 & \lambda_1 & \cdots & & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & \\
\hline
& & & & \lambda_{q+1} & 0 & 0 & \cdots \\
& \mathbf{0} & & & 0 & \lambda_{q+2} & 0 & \cdots \\
& & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
& & & & 0 & 0 & 0 & \lambda_n
\end{array}\right] \tag{87}
$$

$$\mathbf{B}^T=[0\cdots 0\ 1\ 1\cdots 1]$$

$$\mathbf{C}=[c_1\ c_2\cdots c_n]$$

$$\mathbf{D}=[r_0]$$

由方程(82)与(85)可建立图 4.7-9 的流图。如图所示，状态变量是积分器的输出．这个图非常简洁地概括了方程(82)及(85)．具有重根的系统的部分分式展开导致系统矩阵的所谓约当型 [Gantmacher, 1959]．这就是说，由 (87) 所定义的矩阵 **A** 表示 **A** 的约当型．事实上每一个矩阵 **A** 相似于约当矩阵 **J**；也即存在一个非奇矩阵 **T** 使得

$$\mathbf{J}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \tag{88}$$

其中 **J** 是约当矩阵．如果定义 $\mathbf{H}_n$ 是 $n\times n$ 矩阵

$$
\mathbf{H}_n=\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 1 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{bmatrix} \tag{89}
$$

且 $\mathbf{J}_i=\lambda_i\mathbf{I}+\mathbf{H}_n$，则约当矩阵是拟对角形矩阵 $\mathbf{J}=\mathrm{diag}[\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \cdots, \mathbf{J}_n]$．为了说明约当矩阵的一般结构，考察由约当块

$$\mathbf{J}_1=\lambda_1\mathbf{I}+\mathbf{H}_2$$

$$\mathbf{J}_2=\lambda_2\mathbf{I}+\mathbf{H}_3$$

$$\mathbf{J}_3=\lambda_3$$

$$\mathbf{J}_4=\lambda_4\mathbf{I}+\mathbf{H}_2$$

构成的矩阵．约当矩阵取形式

$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix} \begin{array}{cc}\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_1\end{array} & & & \\ & \begin{array}{ccc}\lambda_2 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 1\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{array} & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \begin{array}{cc}\lambda_4 & 1\\ 0 & \lambda_4\end{array} \end{bmatrix} \tag{90}$$

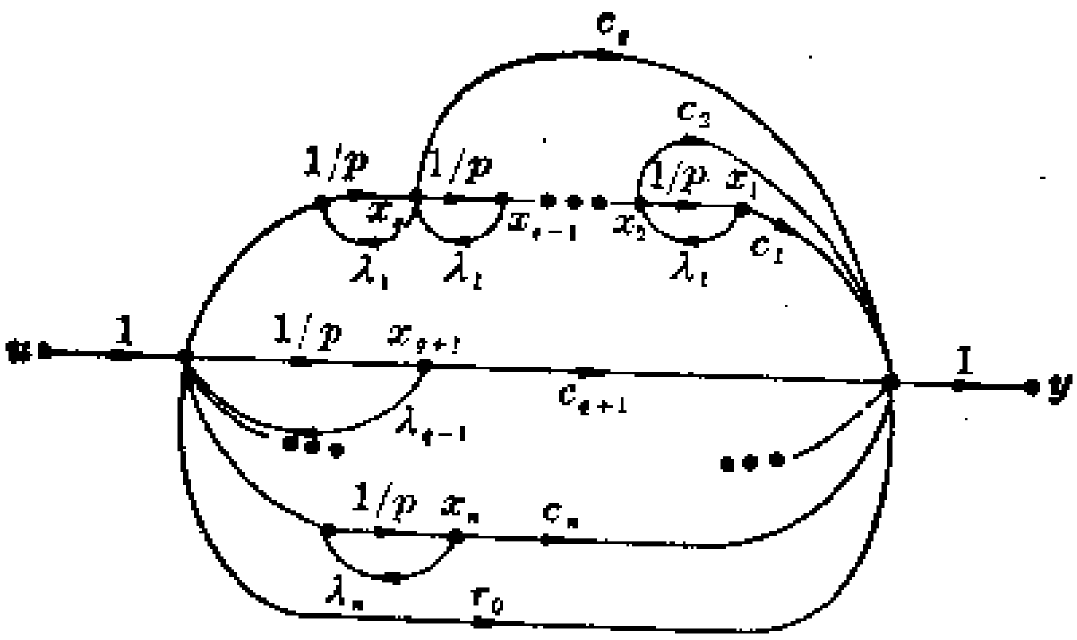


图 4.7-9　具有重极点系统的流图。

4.8．多输入多输出系统

给定一个系统，它由下列微分方程组描述：

$$\begin{aligned} &L_1(p)y_1=M_1(p)u_1\\ &L_2(p)y_2=M_2(p)u_2\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &L_k(p)y_k=M_k(p)u_k \end{aligned} \tag{1}$$

对每个微分方程或子系统可指定状态变量．例如，对子系统可写

出状态方程

$$\dot{\mathbf{x}}_i=\mathbf{A}_i\mathbf{x}_i+\mathbf{B}_i u_i, \qquad i=1,2,\cdots,k$$
$$y_i=\mathbf{C}_i\mathbf{x}_i+\mathbf{D}_i u_i,$$

其中 $\mathbf{A}_i$ 是 $n_i\times n_i$ 矩阵。到此，可定义全系统的状态矢量为分块列矢量 $\mathbf{x}=[\mathbf{x}_1^T \mid \mathbf{x}_2^T \mid \cdots \mid \mathbf{x}_n^T]^T$. 状态空间有维数 $n_1+n_2+\cdots+n_k$. 对应的系统矩阵 $\mathbf{A}$ 应为拟对角形的：

$$\mathbf{A}=\mathrm{diag}[\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\cdots,\mathbf{A}_k] \tag{2}$$

换言之，对应于状态矢量这个选择的系统方程应为标准形式

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y}=\mathbf{C}\mathbf{x}+\mathbf{D}\mathbf{u}$$

其中A由(2)给出. 矩阵B,C与D根据子系统矩阵是容易建立的. 留给读者去建立这些结果. 在下面例子中说明一个稍微不同的系统.

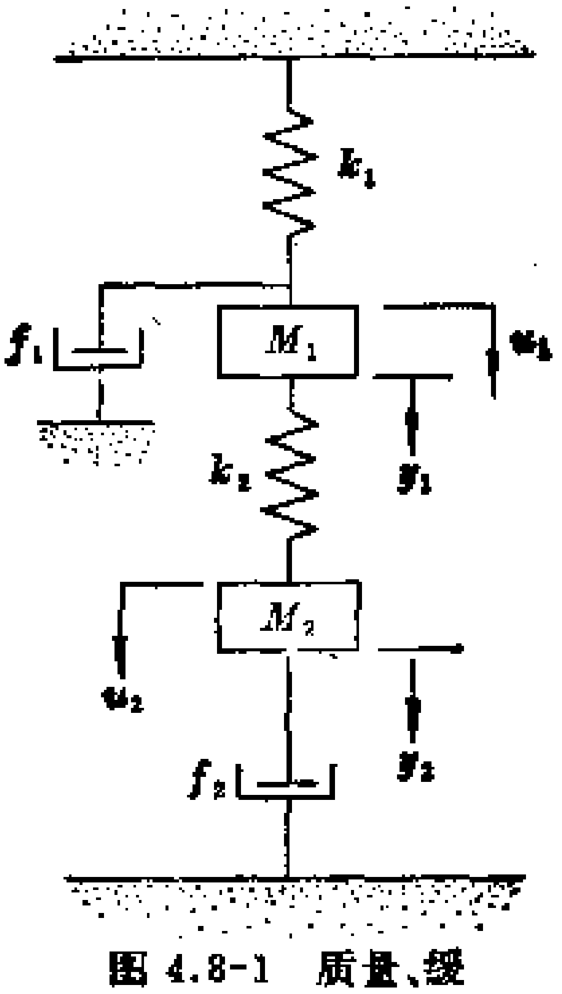


图 4.8-1 质量、缓冲器与弹簧的力学系统。

例 4.8-1 图 4.8-1 所示的力学系统是由输入 u_1 与 u_2 激励的。系统的输出是两个质量 M_1 与 M_2 从它们的平衡点的位移。如图中所指出的，两个输出记为 y_1 与 y_2。写出对质量 M_1 的动态方程，有

$$u_1-k_1y_1-k_2(y_1-y_2)-f_1\dot{y}_1=M_1\ddot{y}_1 \tag{3}$$

对质量 M_2，有

$$u_2-k_2(y_2-y_1)-f_2\dot{y}_2=M_2\ddot{y}_2$$

整理这些方程，得

$$M_1\ddot{y}_1+f_1\dot{y}_1+(k_1+k_2)y_1-k_2y_2=u_1 \tag{4}$$

$$M_2\ddot{y}_2+f_2\dot{y}_2+k_2y_2-k_2y_1=u_2 \tag{5}$$

设想取状态变量如下：

$$x_1=y_1$$
$$x_2=\dot{y}_1$$
$$x_3=y_2$$
$$x_4=\dot{y}_2$$

于是相继有

$$\dot{x}_1=\dot{y}_1=x_2$$

$$\dot{x}_2=\ddot{y}_1=-\frac{f_1}{M_1}x_2-\frac{k_1+k_2}{M_1}x_1+\frac{k_2}{M_1}x_3+\frac{u_1}{M_1}$$

$$\dot{x}_3=\dot{y}_2=x_4$$

$$\dot{x}_4=\ddot{y}_2=-\frac{f_2}{M_2}x_4-\frac{k_2}{M_2}x_3+\frac{k_2}{M_2}x_1+\frac{u_2}{M_2}$$

这些方程的矩阵形式为

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u} \tag{6}$$

其中

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1+k_2}{M_1} & -\frac{f_1}{M_1} & \frac{k_2}{M_1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{M_2} & 0 & -\frac{k_2}{M_2} & -\frac{f_2}{M_2} \end{array}\right],\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{M_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_2} \end{bmatrix} \tag{7}$$

输出方程是

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\mathbf{C}\mathbf{x}$$

其中

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

前面的例子说明§4.7中所建立的方法用不着作实质上的修改就可用于更复杂的系统．因而将不继续这个方面的进一步研究，除非阐明另一个有时会发生的共同情况．设想线性系统给出为

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u} \tag{9}$$

其中u是某个已知或未知的激励函数．换言之，激励函数可以是系统元件固有的某种内系统误差或者可以是有意用于激励系统的信号．考虑前一种情况，问题在于决定或估计u使得补偿控制能

有效地把误差化为零．为了估计 $\mathbf{u}$,还有 $\mathbf{x}$，假设某些输出矢量 $\mathbf{y}$ 能被测量，使得输出方程是

$$\mathbf{y}=\mathbf{C}\mathbf{x} \tag{10}$$

得出 $\mathbf{u}$ 的一个估计的初步过程为：对列矢量 $\mathbf{z}=[\mathbf{x}^T \mid \mathbf{u}^T]^T$，$\mathbf{z}$ 的导数是 $\dot{\mathbf{z}}=[\dot{\mathbf{x}}^T \mid \dot{\mathbf{u}}^T]^T$．为要得到z的一组标准方程

$$\dot{\mathbf{z}}=\mathbf{F}\mathbf{x}+\mathbf{G}\mathbf{v} \tag{11}$$

$$\mathbf{y}=[\mathbf{C} \mid \mathbf{0}]\mathbf{z} \tag{12}$$

显然，$\mathbf{u}$ 的导数必需为已知的（或假设的）．在许多情况，$\mathbf{u}$ 表示偏误差(即常数)，这时

$$\dot{\mathbf{u}}=\mathbf{0} \tag{13}$$

由方程(11)与(12)定义的系统通常称为增广系统．当方程(13)成立时，增广系统矩阵 $\mathbf{F}$ 是分块矩阵

$$\mathbf{F}=\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{array}\right] \tag{14}$$

而 $\mathbf{G}=\mathbf{0}$。

另一方面，设想矢量 $\mathbf{u}$ 的每一个元素 u_i 是用指数函数来表示的．例如，设想 $u_i=u_i(0)e^{\beta_i t}$．于是对 $i=1,2,\cdots,k$

$$\dot{u}_i=\beta_i u_i \tag{15}$$

设 $\mathbf{D}$ 为对角形矩阵 $\mathbf{D}=\mathrm{diag}[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_p]$，合理的系统矩阵 $\mathbf{F}$ 可见为

$$\mathbf{F}=\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{D}\end{array}\right] \tag{16}$$

显然，其他形式的激励函数也是可以处理的．例如，设想 $\mathbf{u}$ 的第一个分量 u_1 是正弦型的，则 u_1 满足微分方程

$$\ddot{u}_1+\Omega_1^2 u_1=0 \tag{17}$$

为了描述这个强制函数需要两个状态变量，例如

$$w_1 = \Omega_1 u_1$$
$$w_2 = \dot{u}_1$$

于是

$$\dot{w}_1 = \Omega_1 \dot{u}_1 = \Omega_1 w_2$$
$$\dot{w}_2 = \ddot{u}_1 = -\Omega_1 w_1$$

或矩阵形式

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{T}\mathbf{w} \tag{18}$$

其中

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_1 \\ -\Omega_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

从这个讨论，显然增广系统的维数是用于处理激励函数的微分方程的复杂性的函数．例如，一个状态变量就足够描述一个常数(阶跃函数)与一个指数函数．为了描述斜坡函数，从下面的步骤可以看到它需要两个状态变量．设斜坡函数是

$$u = c_0 + c_1 t$$

并且设 $x_1 = u, x_2 = c_1$ 是两个状态变量．于是

$$\dot{x}_1 = \dot{u} = c_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = 0$$

或

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{20}$$

按照前面的过程，我们能建立任何多项式输入

$$u = \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i$$

的状态方程为形式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{21}$$

或

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{H}_n \mathbf{x} \tag{22}$$

4.9. 结束语

本章利用一些初等电路作为说明的例子，介绍了状态与状态空间的概念．然后把这个思想推广成对任何抽象系统S的状态的定义．为了在今后的运算中使用，对系统S定义了一些特殊状态，例如零态与基态．利用这些定义，给出了线性性质与时不变性的确切的定义．一般说来，在§4.1到§4.6的材料给出的状态与状态空间的基本概念与思想，将用于今后整个教程中．

在§4.7与§4.8，大量的时间用于列出线性系统的状态方程．我们发现状态矢量不是唯一的．在这点上介绍了一个系统的约当型．在以后的章节中要用矩阵的这种形式去证明一些关于系统性态的重要定理．

读者可能注意到在这一章的讨论中只考察了很少几个物理系统，它们是最简单的电路和一个简单的力学系统．我们有意这样做，首先是因为各种科目现在应在系统分析的范围内来实践．我们觉得用太多的时间去推导复杂的物理系统的方程就不能足够地研究初等概念．在整个教程中我们普遍坚持这个原则．用无具体物理原型（例如一个航空控制系统）的简单例子来说明概念与思想，目的在于说明状态空间方法的用处而不陷入数学或技术细节的困境之中．

参考书目

Brown, R. G., and J. W. Nilsson: *Introduction to Linear System Analysis* John wiley & Sons, Inc., New York, 1962.

Clark, R. N.: *Introduction to Automatic Control Systems*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1962.

Gantmacher, F. R.: *The Theory of Matrices*, vol. I, Chelsea Publishing Company, New York, 1959.

Kalman, R. E.: On the General Theory of Control Systems, *Proc. First Intern. Congr. Automatic Control*, Moscow, 1960, vol. 1, pp. 481–493, 1961, Butterworth & Co. (publishers), Ltd., London.

Kalman, R. E.: Mathematical Description of Linear Dynamic Systems, *SIAM J. Control*, 1963.

Newton, G. C., L. A. Gould, and J. F. Kaiser: *Analytical Design of Linear Feedback Controls*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1957.

Truxal, J. G.: *Automatic Feedback Control System Synthesis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1955.

Wylie, C. R., Jr.: *Advanced Engineering Mathematics*, 3 d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.

Zadeh, L. A., and C. A. Desoer: *Linear System Theory*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1963.

习题

4.1. 求一阶微分方程

$$\frac{dx}{dt}+\frac{1}{t}x=u(t)$$

的通解。求此系统的零态。零态是唯一的吗？此系统有基态吗？

4.2. 微分方程

$$\frac{dx}{dt}+(\operatorname{tg} t)x=u$$

其中 $u=k\sin 2t$，有解

$$x(t)=(\cos t)x(0)+2k(1-\cos t)\cos t$$

假如零态与基态存在的话，把它们求出来。

4.3. 求解微分方程

$$\frac{dx}{dt}+tx=0$$

求其零态及基态。

4.4. 考察微分系统

$$\frac{dx_1}{dt}=-\beta_1 x_1$$

$$\frac{dx_2}{dt}=-\beta_2 x_2$$

它的输出由

$$y(t)=x_1(t)+x_2(t)$$

定义。此系统有唯一的零态吗？基态是什么？

4.5. 在习题 4.4 中设 $\beta_1=0$。系统有唯一的零态吗？若基态存在，它是什么？

4.6. 在习题 4.4 中设 $\beta_1=\beta_2\neq 0$。系统有唯一的零态吗？它有基态吗？若 $\beta_1=\beta_2=0$ 怎样？

4.7. 求习题 4.1，4.2 及 4.3 的平衡态。

4.8. 求习题 4.1，4.2 及 4.3 的稳态响应。

4.9. 在习题 4.4 中设 $\beta_2=0$。求平衡态及稳态响应。

4.10. 若 $\beta_1=\beta_2=0$，再解习题 4.9.

4.11. 习题 4.1 中的系统有解

$$x(t)=\frac{t_0 x(t_0)}{t}+\int_{t_0}^{t}\frac{s}{t}u(s)ds$$

按照定义 4.4-1 及 4.4-2，系统是齐次的与可加的吗？系统是零态线性的吗？

4.12. 习题 4.11 中的系统对初态是齐次的与可加的吗？系统是零输入线性的吗？

4.13. 习题 4.2 中的系统是零态线性及零输入线性的吗？

4.14. 习题 4.3 中的系统是零输入线性吗？

4.15. 设系统的零态响应由

$$y(t)=\int_{t_0}^{t}\phi(\xi)u^2(\xi)d\xi$$

给出，其中 $u(t)$ 是输入而 $\phi(t)$ 是一个任意函数。系统是零态线性的吗？

4.16. 系统的零态响应由下列方程

$$y(t)=u^2+\frac{du}{dt}$$

给出。系统对 u 是齐次的吗？对 u 是可加的吗？

4.17. 如§ 4.5 所示，由方程(4.5-5)所描述的系统不是零态时不变的。系统是零输入时不变的吗？

4.18. 习题 4.1 中的系统是零态时不变的吗？它是零输入时不变的吗？

4.19. 习题 4.2 中的系统是零输入时不变的吗？ 它是零态时不变的吗？

4.20. $a(t)$在什么条件下，例 4.6-1 中的系统是时不变的？

4.21. 一个系统是由微分方程

$$a\dddot{y}+b\ddot{y}+c\dot{y}+dy=0$$

描述的。设$x_1=y$，$x_2=\dot{y}$ 及 $x_3=\ddot{y}$ 是状态变量，并且设把 $\dot{y}$ 定义为输出。确定标准方程。

4.22. 在习题 4.21 中设取状态变量为

$$x_1=ay$$

$$x_2=a\dot{y}+by$$

$$x_3=a\ddot{y}+b\dot{y}+cy$$

确定系统的标准方程，包括输出方程。

4.23. 试求由习题 4.21 中确定的标准系统的特征方程，并与习题 4.22 中确定的标准系统的特征方程比较。

4.24. 对习题 4.21 中的系统配以任何一组状态变量，但与习题 4.21 及 4.22 中的不同。试求所得系统的特征方程。

4.25. 考察变系数微分方程

$$a(t)\ddot{y}+b(t)\dot{y}+c(t)y=0$$

设 $x_1=y$ 与$x_2=\dot{y}$ 为状态变量，试确定标准状态方程(取 y 为输出)。

4.26. 对习题 4.25 中的系统定义状态变量

$$x_1=a(t)y$$

$$x_2=a(t)\dot{y}-\dot{a}(t)y+b(t)y$$

试确定状态方程。

4.27. 在习题 4.26 中设 $a(t)=1$，$b(t)=c(t)=t$。试求状态方程。

4.28. 推广习题 4.26 的结果到三阶系统

$$a(t)\dddot{y}+b(t)\ddot{y}+c(t)\dot{y}+d(t)y=0$$

4.29. 对传递函数是

$$H(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)^2}$$

的系统求出至少三个合格的状态矢量表示（参看例 4.7-1）。

4.30. 对于由微分方程

$$(p+1)(p+2)^2y=(p+3)(p+4)u$$

所定义的系统至少配以两个状态矢量。

4.31. 试对习题 4.30 中状态变量的选择作出适当的流图。

4.32. 若 $u=t$，应用图 4.7-7 的一般结果到习题 4.30 中的系统。

4.33. 在图 $P4.33$ 中选取状态变量作为积分器的输出。设 x_i 是积分器的输出，如图所指出的。写出状态方程的标准形式

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y}=\mathbf{C}\mathbf{x}+\mathbf{D}\mathbf{u}$$

并且用合适的矩阵元素，例如如所指出的 a_{11}，来标明流图。

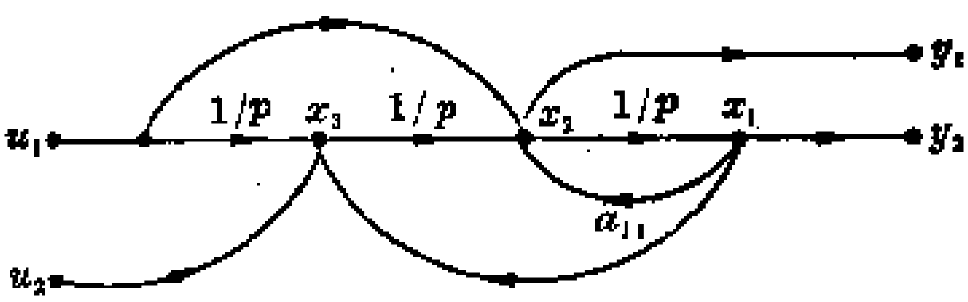


图 $P4.33$

4.34. 如果在左方积分器的输出是状态变量 x_1，而在右方积分器的输出是状态变量 x_3 再作习题 4.33。

4.35. 对方程 $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}$ 所描述的系统，画出它的流图，其中

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & -\theta\\0 & \theta & 0\end{bmatrix}$$

4.36. 作变量变换使得习题 4.35 中的系统矩阵 A 对角形化。换言之，求一个矩阵 T 使得

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}=\text{diag}[0,-i\theta,i\theta]$$

4.37. 考察图 $P4.37$ 的流图所表的系统。利用所指出的状态变量，试求合适的状态方程。系统矩阵 A 是简单结构吗？试求它的特征方程。

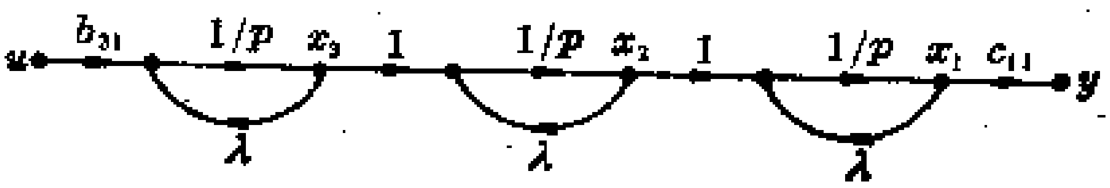


图 $P4.37$

4.38 考察方程（4.7-54）所表的正常系统及图$P4.38$中的流图。取状态变量作为积分器的输出，如图所示。试求用方程（4.7-54）中的系数a_i与b_i表示α_i与β_i的表达式。给出矩阵记法的状态方程。

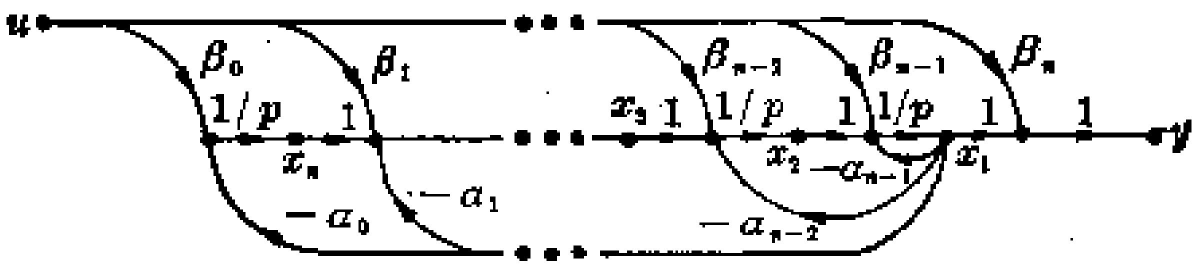


图 $P4.38$

4.39 考察三角形矩阵，其结构为

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots\\ a_2 & a_1 & 1 & 0 & \cdots\\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{bmatrix}$$

试证三角形矩阵

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ b_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots\\ b_2 & b_1 & 1 & 0 & \cdots\\ b_3 & b_2 & b_1 & 1 & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{bmatrix}$$

是矩阵 $\mathbf{A}$ 的逆，其中

$$b_n=-\sum_{i=1}^{n}a_ib_{n-i},\quad 又\ b_0=1.$$

4.40 在图$P4.40$的流图中，状态变量取为积分器的输出及微分器的输入。试确定合适的状态方程。它们是标准形式吗？

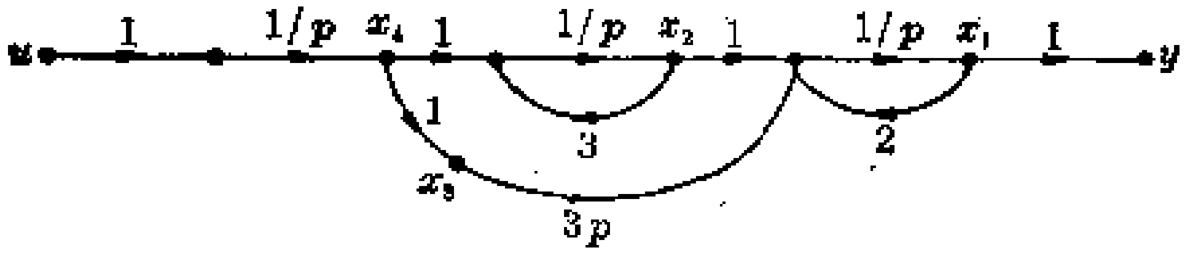


图 $P4.40$

4.41. 利用部分分式求系统的约当型表示，它的传递函数是

$$H(s)=\frac{s+3}{(s+1)^2(s+2)}$$

4.42. 如果传递函数是

$$H(s)=\frac{s^2+2}{s(s+1)(s+2)}$$

再作习题 4.41.

4.43. 如果传递函数是

$$H(s)=\frac{s^4}{(s+1)^3(s+2)}$$

再作习题 4.41.

4.44. 系统是由常系数微分方程组

$$a_1\ddot{y}_1+b_1\dot{y}_1+c_1y_1=u$$

$$a_2\ddot{y}_2+b_2\dot{y}_2+c_2y_2=b_1\dot{u}+b_2u$$

描述的。定义状态变量为 $x_1=y_1, x_2=\dot{y}_1, x_3=y_2$ 及 $x_4=\dot{y}_2$，试导出标准状态方程。输出矢量是 $\mathbf{y}=[y_1 \quad y_2]^T$。

4.45. 试求例 4.8-1 中系统的特征方程。设 $f_1=f_2=0$，试求系统的特征值。在这个情况特征值作何物理解释？

4.46. 对图 $P4.46$ 的流图，确定状态方程。

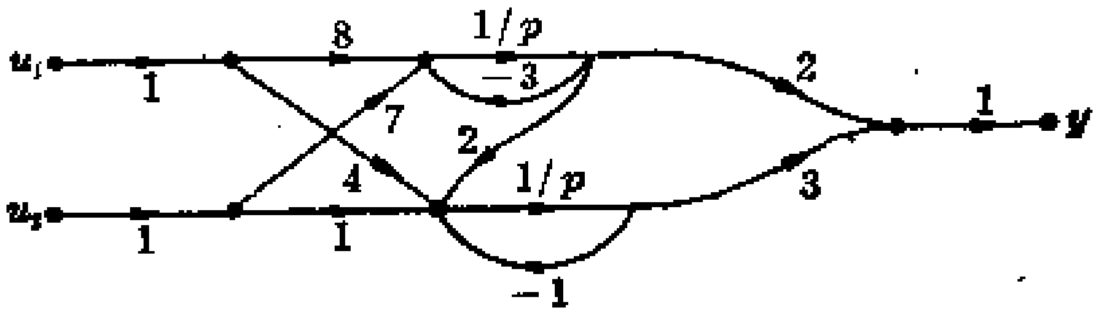


图 $P4.46$

4.47 考察系统

$$\ddot{y}+4\dot{y}+3y=u$$

设 $x_1=y$ 及 $x_2=\dot{y}$ 是状态变量。如果 $u=a+bt$，试推导增广系统方程。

4.48. 如果 $u=\sin\Omega t$，再作习题 4.47.

4.49. 对激励函数 u 推导状态方程，使得系统的输出是 $u=e^{-\beta t}\cos\omega t$。

第五章　线性微分系统

5.1. 引言

在这一章我们研究线性微分系统的解和论证线性微分系统的状态空间是线性空间．在这方面我们定义了状态空间的基函数，并把这些基函数和§4.7讨论过的某些状态变量相联结．从考察单输入单输出系统而引入解空间、基函数和维数的概念．这样作是为了简化讨论和复习求解微分方程组的古典方法．

在§5.3中定义了一般微分系统而且为了建立解的存在性与唯一性介绍了定理5.3-1．然后讨论这个定理在判定特殊状态矢量上的作用．在§5.5讨论线性时变系统，然后考察时不变线性系统并介绍求它的封闭形式解的各种分析方法．

一般说来，我们采用的方法是把大部分繁重的计算留给数字计算机．事实上，计算时变系统的响应唯一有效方法是利用数字计算机．此外，如果系统是高阶的（三阶或更高阶），则如我们将要证实的，即使对于常系数系统，计算方面也是复杂的．因此我们的态度是介绍系统问题的分析方面而把计算问题归于数字或模拟计算机。

5.2. 解空间与基函数

这一节在某些内容上类似于§4.7且有所发展．首先考察一个线性时不变的微分方程并用状态空间的术语研究它的解．基本上我们假设读者已有线性微分方程的知识，因而我们的目标不是作微分方程的广泛的论述，而是把微分方程及其解放在状态空间记号中．先从古典方法开始，再在以后各节中推广．在这一节只考察二阶时不变的线性微分方程

$$a\ddot{y}+b\dot{y}+cy=u \tag{1}$$

用古典方法解此方程，首先考察齐次方程

$$a\ddot{y}+b\dot{y}+cy=0 \tag{2}$$

并且假设有形如

$$y=ke^{mt} \tag{3}$$

的解，其中 k 是任意常数。把(3)代入(2)，并消去适当的项，得到特征方程

$$am^2+bm+c=0 \tag{4}$$

特征方程有两个根

$$m_1,\ m_2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{5}$$

所以若 $m_1\neq m_2$，齐次方程有两个不同的解。这些解是

$$y_1=k_1e^{m_1t} \tag{6}$$

$$y_2=k_2e^{m_2t} \tag{7}$$

若 $m_1=m_2$，也存在第二个解。较正式地说，我们断言，方程 (2)存在两个线性独立的解，使得任一解都可写成这两个解的线性组合[Hochstadt, 1963]。例如设想 $m_1\neq m_2$，则 y_1 与 y_2 是线性独立的解，而方程(2)的任意解都可写成

$$y=k_1y_1+k_2y_2 \tag{8}$$

其中 k_1 与 k_2 是任意常数。由(8) 式表示的解的集合是一个线性矢量空间。这就是说，y_1 与 y_2 是齐次微分方程的解，这些解确定了一个集合。这个集合在数乘下是封闭的，因为若 y_1 是一个解，显然 k_1y_1 也是一个解，正如下列运算所表示的：

$$a(k_1\ddot{y}_1)+b(k_1\dot{y}_1)+c(k_1y_1)=k_1(a\ddot{y}_1+b\dot{y}_1+cy_1)=0$$

此外，容易证明 $k_1y_1+k_2y_2$ 也是一个解，因此解的集合在加法下是封闭的。换言之，解的集合是一个线性空间，称为微分方程的解空间。

若 y_1 与 y_2 是线性独立的解，则称它们为基函数。如在§5.5所表明的，此解空间是二维的[Coddington 与 Levinson，1955]。这就是说，两个线性独立解的存在使得任何解都可写成(8)的形式。下面的例子是有指导性的。

例 5.2-1 证明若 $m_1 \neq m_2$，则 y_1 与 y_2 是方程(2)的线性独立解。为此，考察线性关系

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0 \tag{9}$$

并检查这个线性关系式只有平凡解 $c_1 = c_2 = 0$ 满足，其中 c_1 和 c_2 是任意常数。微分此线性关系，得

$$c_1 \dot{y}_1 + c_2 \dot{y}_2 = 0 \tag{10}$$

方程(9)和(10)表示两个未知数 c_1 和 c_2 的两个齐次方程。此方程组的行列式为

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \dot{y}_1 & \dot{y}_2 \end{vmatrix} = y_1 \dot{y}_2 - \dot{y}_1 y_2 \tag{11}$$

把(6)(7)代入(11)得

$$W = (m_2 - m_1) e^{(m_1 + m_2)t}$$

当 $m_1 \neq m_2$ 时它不为零，所以方程(9)有唯一解 $c_1 = c_2 = 0$，因而 y_1 和 y_2 是线性独立的。这个行列式 W 称为朗斯基行列式。

这里我们不去进一步深究这个问题，因为将在以后各节中讨论更一般的情况。在这里我们的意图是引入线性解空间的概念并给微分系统配以基函数。但是我们要提出一点：n 阶线性微分方程的解空间是一个 n 维线性空间。这个内容将在§5.5中详细讨论。

在§4.7我们给出过方程

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = u \tag{12}$$

的两个状态矢量。如那里所论述的，我们考察过零输入响应(齐次解)以把初态矢量 $\mathbf{x}(t_0)$ 与初始条件连结起来。现在想考察联系状态变量的这两种选择的基函数。为了求得对应于状态矢量

$$\mathbf{x}_0=\begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_0 \\ \dot{y}_0 \end{bmatrix}$$

(如在方程(4.7-6)所定义的)的基函数，我们利用零输入响应的拉氏变换式①，得到

$$Y(s)=H(s)a\dot{y}_0+H(s)(as+b)y_0$$

所以零输入响应函数是

$$y(t)=f_1(t)y_0+f_2(t)\dot{y}_0$$

或
$$y(t)=f_1(t)x_1(t_0)+f_2(t)x_2(t_0) \tag{13}$$

其中
$$f_1(t)=\mathscr{L}^{-1}[(as+b)H(s)] \tag{14}$$

$$f_2(t)=\mathscr{L}^{-1}[aH(s)] \tag{15}$$

这两个时间函数 $f_1(t)$和 $f_2(t)$ 如果是线性独立的，它们就是基函数．显然，如果这两个时间函数各个的拉氏变换式是线性独立的，它们就是线性独立的。要证明拉氏变换式是线性独立的，我们考察线性关系

$$k_1aH(s)+k_2(as+b)H(s)=0$$

或
$$k_1a+k_2(as+b)=0$$

整理后，有

$$s(k_2a)+k_1a+k_2b=0$$

令左右两边 s 同幂系数相等，得到

$$k_2a=0 \qquad k_1a+k_2b=0$$

由这些关系式得出，当 $a\neq0, k_1=k_2=0$。于是拉氏变换式是线性独立的，因而推知 $f_1(t)$和 $f_2(t)$是基函数。状态空间是二维线性空间，且任何零输入响应可写成关系式(13)。

现在考察对应于(4.7-17)的状态矢量，即

$$\mathbf{x}_0=\begin{bmatrix} ay_0 \\ a\dot{y}_0+by_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix}$$

的基函数。这个形式的状态矢量是以写出形如

① 我们利用拉氏变换只是向读者介绍更多的观点。

$$Y(s)=H(s)[(ay_0)s+(a\dot{y}_0+by_0)]$$

的零输入响应的拉氏变换给出的：s 的幂的系数选作为初态变量，使得基函数是

$$g_1(t)=\mathscr{L}^{-1}[sH(s)] \tag{16}$$

$$g_2(t)=\mathscr{L}^{-1}[H(s)] \tag{17}$$

因此在这种情况零输入响应是

$$y(t)=g_1(t)ay_0+g_2(t)(a\dot{y}_0+by_0)$$

或
$$y(t)=g_1(t)x_1(t_0)+g_2(t)x_2(t_0) \tag{18}$$

下面的具体例子可帮助说明这种想法。

例 5.2-2 考察微分方程

$$\ddot{y}+3\dot{y}+2y=u$$

零输入响应的拉氏变换式是

$$Y(s)=\frac{\dot{y}_0+(s+3)y_0}{s^2+3s+2}$$

如果选取状态矢量为

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

则基函数为

$$f_1(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+3}{s^2+3s+2}\right]=2e^{-t}-e^{-2t}$$

$$f_2(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+3s+2}\right]=e^{-t}-e^{-2t}$$

于是零输入响应是

$$y(t)=(e^{-(t-t_0)}-e^{-2(t-t_0)})\dot{y}_0+(2e^{-(t-t_0)}-e^{-2(t-t_0)})y_0 \tag{19}$$

另一方面，若状态矢量定义为

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} y \\ \dot{y}+3y \end{bmatrix}$$

基函数为

$$g_1(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+3s+2}\right]=-e^{-t}+2e^{-2t}$$

$$g_2(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+3s+2}\right]=e^{-t}-e^{-2t}$$

而零输入响应为

$$y(t)=(-e^{-(t-t_0)}+2e^{-2(t-t_0)})y_0+(e^{-(t-t_0)}-e^{-2(t-t_0)})(\dot{y}_0+3y_0) \quad (20)$$

实质上,(13)与(18)式说明了线性时不变系统的零输入响应是线性型或线性泛函[Zadeh 与 Desoer,1963]. 这就是说，零输入响应函数对固定的 t 可以有表达式

$$y(t)=S[\mathbf{x}(t_0);\mathbf{0}]=\sum_{i=1}^{n}a_i x_i(t_0) \quad (21)$$

当然这可更一般地由性质(4.4-10)和(4.4-11)所确定的零输入线性性质定义得出.换言之,零输入响应的齐次性与可加性指出$y(t)$是线性型. 我们用

$$S(\mathbf{x}_0;\mathbf{0})=\sum_{i=1}^{n}\phi_{1i}(t,t_0)x_i(t_0) \quad (22)$$

表示零输入响应. 其中函数 $\phi_{1i}(t,t_0)$ 可以解释为具有特殊初始条件的零输入响应. 这就是设 $\mathbf{e}_i$ 是特殊初始条件 $\mathbf{e}_i=[0 \quad 0\cdots 1\cdots 0]^T$. 则由(22)式,得

$$S(\mathbf{e}_i;\mathbf{0})=\phi_{1i}(t,t_0) \quad (23)$$

换言之,在系统由初态 $\mathbf{e}_i$ 开始时 $\phi_{1i}(t,t_0)$ 是零输入响应. 如果系统是时不变的,则它是零输入时不变的,因此

$$\phi_{1i}(t,t_0)=\phi_{1i}(t-t_0) \quad (24)$$

换言之，如果在时刻 t 的零输入响应只依赖于时间差 $t-t_0$，而不依赖于时间 t_0，则系统是零输入时不变的[Zadeh 与 Desoer, 1963].

现在我们能够写出线性微分系统的一般解. 线性系统的响应可由零输入响应与零态响应的和给出. 对于单输入单输出系统有

$$y=S(\mathbf{x}_0;u)=S(\mathbf{0};u)+S(\mathbf{x}_0;\mathbf{0}) \quad (25)$$

合并由(4.4-14)给出的零态响应与由(22)给出的零输入响应,有

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}\phi_{1i}(t,t_0)x_i(t_0)+\int_{t_0}^{t}h(t,\xi)u(\xi)d\xi \qquad (26)$$

(26)表示 n 维时变线性系统的一般解。

一组线性独立的零输入响应函数 $\phi_{1i}(t,t_0)$ 称为线性系统的基。如果系统是时变的，函数 $\phi_{1i}(t,t_0)(i=1,2,\cdots,n)$ 对一切 t_0 必是线性独立的。数 n 称为系统的阶数，也是状态空间的维数。

前面的讨论是线性微分方程解法的简要复习。解中使用了状态空间的记号。在下节中将作更一般的讨论，而不限于单输入单输出系统。

5.3. 微分系统

本章主要讨论线性微分系统。然而在这一节里我们大致地把微分系统分类，并且介绍一个与以后讨论有关的基本定理。而且从几何上说明微分系统的解或运动。

考察一阶微分方程组

$$\dot{x}_i=f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n,u_1,u_2,\cdots,u_p,t) \qquad (1)$$

当定义了矢量

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\quad \mathbf{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_p\end{bmatrix},\quad \mathbf{f}=\begin{bmatrix}f_1\\f_2\\\vdots\\f_n\end{bmatrix} \qquad (2)$$

就可建立方程(1)的矢量形式。使用这种记号，一般的线性的以及非线性的微分系统可写作

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t) \qquad (3)$$

方程(3)和方程(4)

$$\mathbf{y}=\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{u},t) \qquad (4)$$

(称为输出方程)一起是描写微分系统的矢量方程或状态方程。例4.2-1 就是说明这样的系统的一个例子。

暂时我们只注意方程(3)，并且不予证明给出关于解的存在性和唯一性定理[Hochstadt,1963]. 设 $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$ 是初始条件并积分方程(3)，得

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_0+\int_{t_0}^{t}\mathbf{f}[\mathbf{x}(s),\mathbf{u}(s),s]ds \quad t\geqslant t_0 \tag{5}$$

可以断言方程(5)是方程(3)的唯一解.此断言由下列定理所证实.

定理 5.3-1 微分系统

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t)$$

对于$\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\leqslant a$ 及 $|t|\leqslant b$(对固定的 $\mathbf{u}$)，只要函数 $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t)$满足 Lipschitz 条件，必有如(5)式给出的唯一解. 这就是说，如果存在一个依赖于 $\mathbf{u}$ 的常数 k，对在区域$\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|\leqslant a$ 内一切 $\mathbf{x}_1$ 及 $\mathbf{x}_2$ 和对域$|t|\leqslant b$ 内一切 t 使得

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_1,\mathbf{u},t_1)-\mathbf{f}(\mathbf{x}_2,\mathbf{u},t_2)\|\leqslant k\|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\|$$

并且函数是有界的，即$\|\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t)\|<M$，则(5)式是方程(3)的唯一解.

若微分系统是线性的且有标准表示式

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}+\mathbf{B}(t)\mathbf{u} \tag{6}$$

其中 $\mathbf{A}(t)$与 $\mathbf{B}(t)$是连续矩阵，则当

$$k=\max_{|t|\leqslant b}\|\mathbf{A}(t)\| \tag{7}$$

定理 5.3-1 是成立的。

现在给出解 $\mathbf{x}(t)$的几何解释. 实质上，解矢量 $\mathbf{x}(t)$ 由坐标 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 作为时间 t 的函数所确定. 例如可写作

$$x_1=h_1(t),x_2=h_2(t),\cdots,x_n=h_n(t) \tag{8}$$

首先考察 $n=1$ 的情况，这时解是 $x_1=h_1(t)$. 这个方程的典型曲线如图 5.3-1 所示. 方程 $x_1=h_1(t)$表示 x_1t 平面上的一条曲线. 若令 $n=2$，且在三维空间(x_1,x_2,t)画出两个函数

$$x_1=h_1(t)$$

$$x_2=h_2(t)$$

的解，如图 5.3-2 所示，得到所谓系统的积分曲线。另一方面，设想我们在二维空间(x_1,x_2)画出以 t 为参数的同样两个函数的解。我们称此结果为系统的轨线或运动。一个系统的典型轨线或运动对 $n=2$ 如图 5.3-3 a，对 $n=3$ 如图 5.3-3 b所示。在画轨线或运动时，状态空间有时称为相空间且有维数 n。 在第六章的大部分内容是研究在相平面(二维相空间)中的轨线。因此在这里我们将不进一步继续这方面的问题。

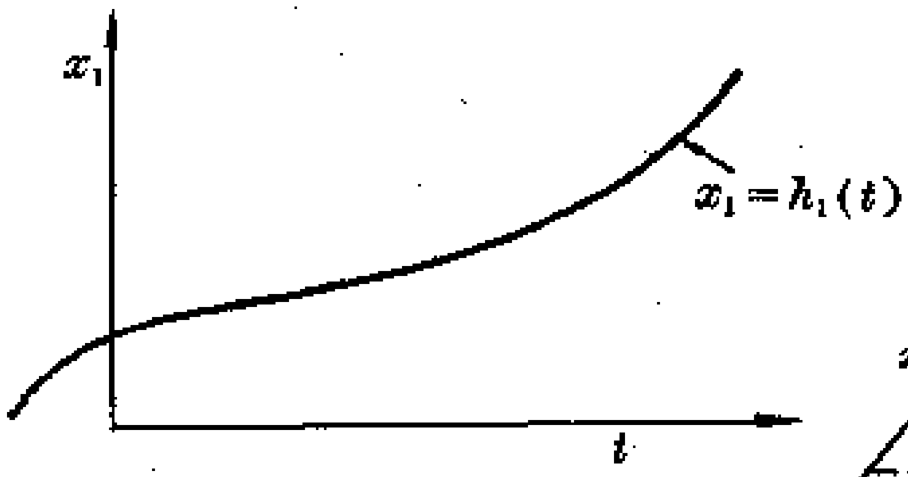


图 5.3-1 x_1t 平面上的曲线.

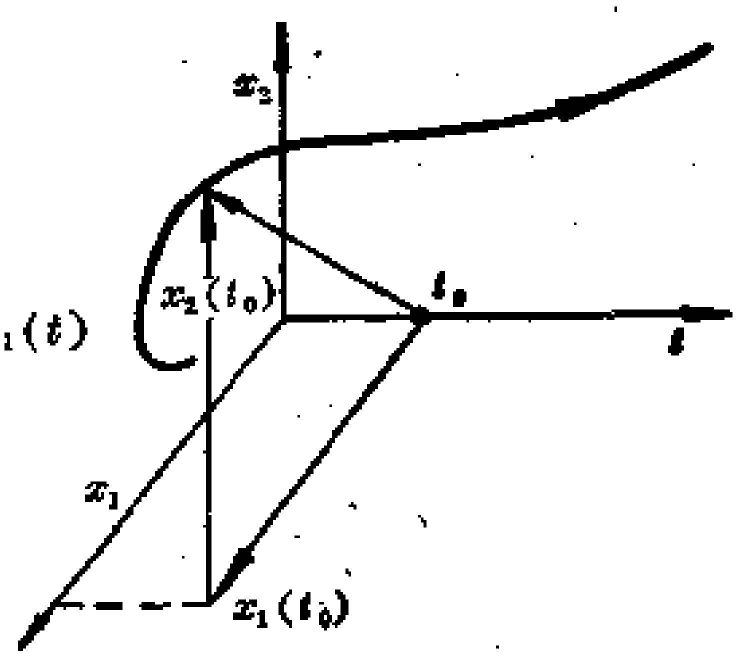


图 5.3-2 系统的积分曲线.

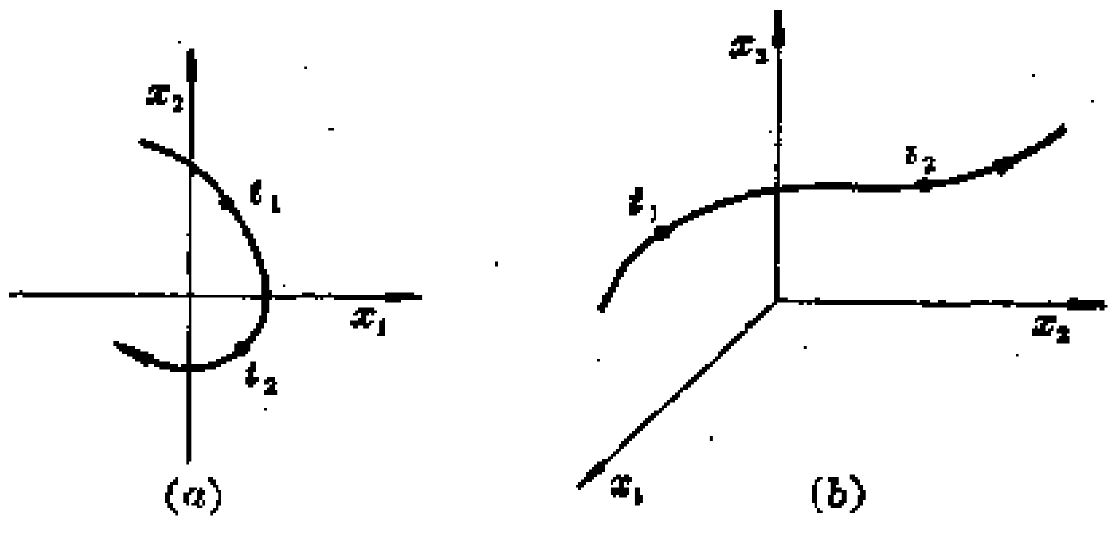


图 5.3-3 相空间的轨线或运动.

现在给出微分系统的一般分类法，并且建立一些记号。方程(3)表示一类普遍的微分系统，因此取此方程作为出发点。

如果因变量(矢量)x 及强制函数 u 及其导数给予系统输出有一个线性作用，则此系统是线性的．我们要讨论的线性系统的一般形式是用如下标准方程来表示的：

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}+\mathbf{B}(t)\mathbf{u} \tag{9}$$

$$\mathbf{y}=\mathbf{C}(t)\mathbf{x}+\mathbf{D}(t)\mathbf{u} \tag{10}$$

一个系统如果自变量 t 不明显地出现，则称为时不变的或定常的．用记号表示，一个系统若有一般表示式

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}) \tag{11}$$

则此系统是定常的．一个线性系统若矩阵 A,B,C 和 D 与 t 无关，也即它们的元素都是常数，则它是时不变的或定常的．

一个自由系统是零输入系统，或不受强制．用记号表示，自由系统有一般表示式

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x},t) \tag{12}$$

如果系统是线性的又是自由的，则

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}(t)\mathbf{x} \tag{13}$$

一个自治系统是时不变系统，充其量具有常强制函数 u．用记号表示，自治系统有一般表示式

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{14}$$

例 4.2-1 的系统有方程(11)的形式，因此这个系统是时不变的非线性系统．系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\ -4x_1x_2-2x_1\end{bmatrix} \tag{15}$$

有方程(14)的形式，因此是非线性自治(定常的和自由的)系统．系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -4t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \cos t\end{bmatrix} \tag{16}$$

或

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}+\mathbf{B}(t)\mathbf{u}$$

是线性的。它不是定常的，因为$\mathbf{A}(t)$的元素不全是常数；它也不是自由的，因$\mathbf{B}(t)\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$。

5.4. 状态的判定

在§4.7我们已注意到状态的定义指出了状态方程

$$\mathbf{x}=\mathbf{F}(\mathbf{x}_0;\mathbf{u})$$

$$\mathbf{y}=\mathbf{S}(\mathbf{x}_0;\mathbf{u})$$

必须是当$t>t_0$使得状态$\mathbf{x}$及输出$\mathbf{y}$是唯一确定的。定理5.3-1提供了对微分系统的一个唯一性检定法。如果状态方程取方程(5.3-3)或(5.3-6)的形式且满足定理的假设，则此系统的运动由(5.3-5)式唯一地给出。我们将研究方程(5.3-5)以说明状态矢量$\mathbf{x}(t)$的一个基本性质。这个性质也可用于判定一个特殊矢量可否作为状态矢量。为了指出$\mathbf{x}(t)$明显地依赖于$\mathbf{x}_0$及$\mathbf{u}$，可写

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}(t;\mathbf{x}_0,\mathbf{u}) \tag{1}$$

其中$\mathbf{u}$应理解为作用在时间区间(t_0,t)上。现在对于任何$t_0<\tau\leqslant t$，方程(5.3-5)可写作

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_0+\int_{t_0}^{\tau}\mathbf{f}[\mathbf{x}(s),\mathbf{u}(s),s]ds+\int_{\tau}^{t}\mathbf{f}[\mathbf{x}(s),\mathbf{u}(s),s]ds \tag{2}$$

再根据方程(5.3-5)

$$\mathbf{x}(\tau)=\mathbf{x}_0+\int_{t_0}^{\tau}\mathbf{f}[\mathbf{x}(s),\mathbf{u}(s),s]ds \tag{3}$$

使方程(2)化为

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}(\tau)+\int_{\tau}^{t}\mathbf{f}[\mathbf{x}(s),\mathbf{u}(s),s]ds \tag{4}$$

方程(4)表示$x(t)$的所谓的响应可分性[Zadeh与Desoer, 1963]。用记号表示，状态可分性表示为

$$\mathbf{x}[t;\mathbf{x}(t_0),\mathbf{u}]=\mathbf{x}[t;\mathbf{x}(\tau),\mathbf{u}] \tag{5}$$

其中 u 在左端是作用于时间区间(t_0,t)，而在右端是作用于时间区间(τ,t)。总之，开始于$\mathbf{x}(t_0)$的系统的响应是在第一个区间(t_0,τ)上响应跟着第二个区间(τ, t)的响应。方程(3)到(5)论证了这个说法。

如在较高深的工作[Zadeh 与 Desoer，1963]中所证明的，响应的可分性是状态的定义的一个推论。并且进一步可证明任何具有状态可分性的 $\mathbf{x}[t,\mathbf{x}(t_0),\mathbf{u}]$可作为状态矢量，联系它的方程构成状态方程。我们已看到方程(5.3-5)具有可分性。我们在微分系统的研究中将不用可分性去判别一个矢量是否可作为状态矢量。定理 5.3-1 给出了这个问题的答案。可分性引起我们较大兴趣是由于它联系着微分系统的一般运动。

5.5. 线性时变微分系统

在这一节里我们考察由标准状态方程

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}+\mathbf{B}(t)\mathbf{u} \tag{1}$$

$$\mathbf{y}=\mathbf{C}(t)\mathbf{x}+\mathbf{D}(t)\mathbf{u} \tag{2}$$

描述的线性微分系统的运动。我们把注意力的绝大部分集中在方程(1)上；因为如果知道了运动 $\mathbf{x}$，确定运动 $\mathbf{y}$ 便是一件容易的事情了。

我们只考虑连续系统。这就是说，我们假定 $n\times n$ 系统描述矩阵 $\mathbf{A}(t)$由 n^2 个标量函数组成，它们都是 t 的连续函数。并且设$\mathbf{B}(t)$是具有连续元素的 $n\times p$ 维矩阵。

自由系统

首先考察自由系统

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}(t)\mathbf{x} \tag{3}$$

且在下列定理中给出它的运动 $\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0)$的一个公式。

定理 5.5-1 设 $\mathbf{A}(t)$对 $t>t_0$ 是连续的，则方程

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}(t)\mathbf{x},\quad \mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$$

有唯一解，记作

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}(t;\mathbf{x}_0)=\mathbf{\Phi}(t,t_0)\mathbf{x}_0 \tag{4}$$

矩阵 $\mathbf{\Phi}(t,t_0)$是满足矩阵微分方程

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Phi}(t,t_0)=\mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t,t_0),\ \mathbf{\Phi}(t_0,t_0)=\mathbf{I} \tag{5}$$

的唯一矩阵。

定理 5.5-1 是容易证明的，首先由(4)式看出

$$\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{\Phi}(t_0,t_0)\mathbf{x}_0=\mathbf{x}_0$$

然后，如果(4)式是可微分的，则有

$$\dot{\mathbf{x}}=\frac{d}{dt}\mathbf{\Phi}(t,t_0)\mathbf{x}_0$$

由(5)式

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}&=\mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t,t_0)\mathbf{x}_0\\&=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}\end{aligned}$$

矩阵 $\mathbf{\Phi}(t,t_0)$ 称为状态转移矩阵，简称转移矩阵。转移矩阵表示把初态 $\mathbf{x}_0$ 映射为状态 $\mathbf{x}(t)$的线性变换。这就是说，从状态$\mathbf{x}_0$到状态 $\mathbf{x}(t)$的转移是由线性算子 $\mathbf{\Phi}(t,t_0)$确定的。为了证明在定义 4.4-3 的意义下自由运动是线性的(即系统是零输入线性的)，由(4)式看到

$$\mathbf{x}(t;k\mathbf{x}_0)=k\mathbf{x}(t;\mathbf{x}_0)$$

及

$$\mathbf{x}(t;\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)=\mathbf{x}(t;\mathbf{x}_1)+\mathbf{x}(t;\mathbf{x}_2)$$

其中 $\mathbf{x}_1$ 及 $\mathbf{x}_2$ 是任意初态。

进而我们断言方程(3)的所有的解的集合形成 n 维矢量空间 C^n[Coddington 与 Levinson，1955]。我们研究这个结论。设 $\mathbf{l}_1$，$\mathbf{l}_2,\cdots,\mathbf{l}_n$ 是 C^n 的一组基，则在 C^n 中任何 $\mathbf{x}_0$ 有表达式

$$\mathbf{x}_0=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\mathbf{l}_i \tag{6}$$

今由于 $\Phi(t,t_0)$是线性算子

$$\Phi(t,t_0)\mathbf{x}_0=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Phi(t,t_0)\mathbf{I}_i$$

$$\mathbf{x}(t)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\mathbf{x}(t;\mathbf{I}_i) \tag{7}$$

这里关系式(7)是由关系(4)推出的. 关系 (7) 表明任何自由运动 $\mathbf{x}(t)$可以表示为 n 个零输入响应 $\mathbf{x}(t;\mathbf{I}_i)$ 的线性组合. 如果我们挑选 $\mathbf{I}_i=\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_i$ 是由(5.2-23)定义的矢量,则 $\mathbf{x}(t;\mathbf{e}_i)=\phi_i(t,t_0)$ 是 $\Phi(t,t_0)$的第 i 列矢量. 可以证明这 n 个列矢量是线性独立的. 而且容易证明 $\Phi(t,t_0)$是非奇的,如下例所示。

例 5.5-1 $\Phi(t,t_0)$的行列式是由

$$|\Phi|=\exp\left[\int_{t_0}^{t}\operatorname{trace}\mathbf{A}(\tau)d\tau\right] \tag{8}$$

给出的。

为了证明(8),取$|\Phi|$对 t 的导数,得

$$\frac{d|\Phi|}{dt}=\begin{vmatrix}\dot\phi_{11} & \dot\phi_{12}\cdots\dot\phi_{1n}\\ \phi_{21} & \phi_{22}\cdots\phi_{2n}\\ \cdots & \cdots\cdots\\ \phi_{n1} & \phi_{n2}\quad\phi_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\phi_{11} & \phi_{12}\cdots\phi_{1n}\\ \dot\phi_{21} & \dot\phi_{22}\cdots\dot\phi_{2n}\\ \cdots & \cdots\cdots\\ \phi_{n1} & \phi_{n2}\cdots\phi_{nn}\end{vmatrix}$$

$$+\cdots+\begin{vmatrix}\phi_{11} & \phi_{12}\cdots\phi_{1n}\\ \phi_{21} & \phi_{22}\cdots\phi_{2n}\\ \cdots & \cdots\cdots\\ \dot\phi_{n1} & \dot\phi_{n2}\cdots\dot\phi_{nn}\end{vmatrix}$$

由方程(5)

$$\dot\phi_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\phi_{kj}$$

作一些行列式运算后,得到微分方程

$$\frac{d|\Phi|}{dt}=\operatorname{trace}\mathbf{A}|\Phi| \tag{9}$$

其通解为

$$|\Phi|=|\Phi|_{t=t_0}\exp\left[\int_{t_0}^{t}\text{trace }\mathbf{A}(\tau)d\tau\right]$$

由于

$$|\Phi|_{t=t_0}=|\Phi(t_0,t_0)|=1$$

故(8)式成立。

由此结果看出，若对区间(t_0,t)内某一t_1，$|\Phi(t,t_0)|\neq 0$，则对区间内一切t值$|\Phi(t,t_0)|\neq 0$。实质上我们所论证的是转移矩阵的列矢量形成 C^n 的一组基。因此这个结果是§5.2中的结果的推广。

现在考察转移矩阵的另一些性质．由关系式(4)得

$$\mathbf{x}(t_2)=\Phi(t_2,t_1)\mathbf{x}(t_1)$$

$$\mathbf{x}(t_3)=\Phi(t_3,t_2)\mathbf{x}(t_2)$$

把第一式的$\mathbf{x}(t_2)$代入第二式，得

$$\mathbf{x}(t_3)=\Phi(t_3,t_2)\Phi(t_2,t_1)\mathbf{x}(t_1)$$

还能写成

$$\mathbf{x}(t_3)=\Phi(t_3,t_1)\mathbf{x}(t_1)$$

比较以上两个关系，得出

$$\Phi(t_3,t_1)=\Phi(t_3,t_2)\Phi(t_2,t_1) \tag{10}$$

为了求$\Phi(t_2,t_1)$的逆，令$t_3=t_1$，由(10)式有

$$\Phi(t_1,t_2)\Phi(t_2,t_1)=\mathbf{I}$$

或

$$\Phi^{-1}(t_2,t_1)=\Phi(t_1,t_2) \tag{11}$$

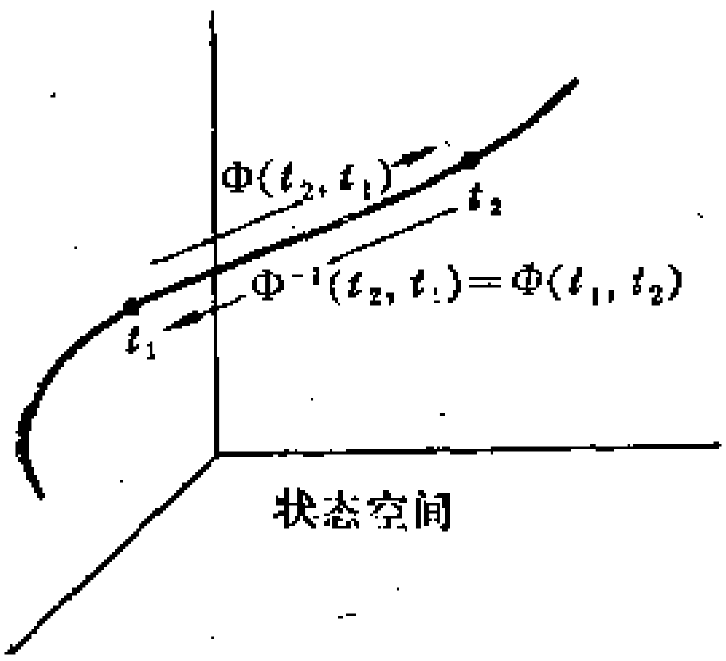


图 5.5-1．转移矩阵及其逆的物理解释．

关系(11)用图说明于图5.5-1中。转移矩阵$\Phi(t_2,t_1)$把t_1时的状态变换为t_2时的状态．变换t_2时的状态回到t_1时的状态是由逆运算完成的．逆运算可简单地由在转移矩阵中颠倒时间变元t_1与t_2的作用

而得到.

强迫响应

系统

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}+\mathbf{B}(t)\mathbf{u} \tag{12}$$

的强迫响应可写成多种形式. 首先我们证明方程(12)的运动由

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{\Phi}(t,t_0)\mathbf{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\mathbf{\Phi}(t,\xi)\mathbf{B}(\xi)\mathbf{u}(\xi)d\xi \tag{13}$$

给出. 用直接代入法容易证明关系(13)满足方程(12). 证法作为练习留给读者.

为了得到关系(13), 我们首先应用拉格朗日参数变易法. 假设有形式为

$$\mathbf{x}=\mathbf{\Phi}\mathbf{y} \tag{14}$$

的解,其中$\mathbf{\Phi}$满足方程(5)(为了简便把时间变元省去了). 把关系(14)代入方程(12)得

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{\Phi})\mathbf{y}+\mathbf{\Phi}\frac{d\mathbf{y}}{dt}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u}$$

应用方程(5),得

$$\mathbf{\Phi}\frac{d\mathbf{y}}{dt}=\mathbf{B}\mathbf{u}$$

于是

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt}=\mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} \tag{15}$$

因此

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{y}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\mathbf{\Phi}^{-1}(\xi,t_0)\mathbf{B}(\xi)\mathbf{u}(\xi)d\xi \tag{16}$$

由(14)得

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{\Phi}(t,t_0)\left[\mathbf{y}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\mathbf{\Phi}^{-1}(\xi,t_0)\mathbf{B}(\xi)\mathbf{u}(\xi)d\xi\right] \tag{17}$$

今利用关系(11),并注意到

$$\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{y}(t_0)$$

我们发现关系(17)等于关系(13)，因为

$$\Phi(t,t_0)\Phi^{-1}(\xi,t_0)=\Phi(t,\xi)$$

请读者借助上面的讨论复习例 4.6-1。

现在我们利用其它方法来求方程(12)的解，其中之一导致伴随系统的定义．为此目的，把方程(12)左乘以尚未定义的变矩阵 $\psi(t,t_0)$ 的共轭转置．有

$$\psi^*\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\psi^*\mathbf{A}\mathbf{x}+\psi^*\mathbf{B}\mathbf{u} \tag{18}$$

其中

$$\psi^*=\bar{\psi}^T$$

并且为了简便再一次把时间变元省去了．对 $\psi^*\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ 作分部积分法，得

$$\psi^*\mathbf{x}\Big|_{t_0}^{t}-\int_{t_0}^{t}\frac{d\psi^*(s,t_0)}{ds}\mathbf{x}(s)ds=\int_{t_0}^{t}\psi^*(s,t_0)\mathbf{A}(s)\mathbf{x}(s)ds$$

$$+\int_{t_0}^{t}\psi^*(s,t_0)\mathbf{B}(s)\mathbf{u}(s)ds \tag{19}$$

作一些小的整理后，(19)式化为

$$\psi^*(t,t_0)\mathbf{x}(t)=\psi^*(t_0,t_0)\mathbf{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\left[\frac{d\psi^*(s,t_0)}{ds}+\right.$$

$$\left.+\psi^*(s,t_0)\mathbf{A}(s)\right]\mathbf{x}(s)ds+\int_{t_0}^{t}\psi^*(s,t_0)\mathbf{B}(s)\mathbf{u}(s)ds \tag{20}$$

如果我们规定 ψ 满足条件

$$\frac{d\psi}{dt}(t,t_0)=-\mathbf{A}^*(t)\psi(t,t_0)$$

$$\psi(t_0,t_0)=\mathbf{I} \tag{21}$$

则(20)式化为

$$\psi^*(t,t_0)\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\psi^*(s,t_0)\mathbf{B}(s)\mathbf{u}(s)ds \tag{22}$$

方程(21)与(5)之间的相似性导致伴随系统的定义；亦即系统

$$\dot{\mathbf{z}}=-\mathbf{A}^*(t)\mathbf{z} \tag{23}$$

称为系统

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x} \tag{24}$$

的伴随系统。为了与定理 5.5-1 相一致，伴随系统的零输入运动由

$$\mathbf{z}(t)=\psi(t,t_0)\mathbf{z}(t_0) \tag{25}$$

给出，其中$\psi(t,t_0)$是伴随系统的转移矩阵且满足方程(21)。

现在我们建立两个解 $\mathbf{x}(t)$和 $\mathbf{z}(t)$ 以及两个转移矩阵$\Phi(t,t_0)$和$\psi(t,t_0)$间的关系。我们断言 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{z}$ 的内积是常数，即

$$(\mathbf{x},\mathbf{z})=\text{const} \tag{26}$$

且

$$\psi^*(t,t_0)\Phi(t,t_0)=\mathbf{I} \tag{27}$$

为了证明关系(26)，有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{x},\mathbf{z})&=(\dot{\mathbf{x}},\mathbf{z})+(\mathbf{x},\dot{\mathbf{z}})\\&=(\mathbf{A}\mathbf{x},\mathbf{z})+(\mathbf{x},-\mathbf{A}^*\mathbf{z})\\&=(\mathbf{A}\mathbf{x},\mathbf{z})-(\mathbf{A}\mathbf{x},\mathbf{z})=0\end{aligned} \tag{28}$$

为了证明关系(27)，首先注意到

$$\psi^*(t_0,t_0)\Phi(t_0,t_0)=\mathbf{I} \tag{29}$$

因之关系(27)当 $t=t_0$时是成立的。此外

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\psi^*\Phi)&=\dot{\psi}^*\Phi+\psi^*\dot{\Phi}\\&=-\psi^*\mathbf{A}\Phi+\psi^*\mathbf{A}\Phi\equiv 0\end{aligned} \tag{30}$$

这就意味着对一切t，包含 $t=t_0$ 在内，$\psi^*\Phi$ 是常矩阵，因而关系(27)成立。

从关系(27)推出

$$\psi^*(t,t_0)=\Phi^{-1}(t,t_0)=\Phi(t_0,t) \tag{31}$$

(31)式的结果可以作为伴随性的另一种定义。若把(31)式代入方程(21)，得到

$$\frac{d}{dt}\Phi^*(t_0,t)=-A^*(t)\Phi^*(t_0,t) \tag{32}$$

实际上，此方程表明伴随系统规定Φ对第二个变元的变化率，反之，Φ对第一个变元的变化率由方程（5）确定。由以上得出的结果，得到关系(13)的另外形式

$$x(t)=\Phi(t,t_0)\left[x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\psi^*(s,t_0)B(s)u(s)ds\right] \tag{33}$$

$$=\Phi(t,t_0)\left[x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi(t_0,s)B(s)u(s)ds\right] \tag{34}$$

$$=\Phi(t,t_0)\left[x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s,t_0)B(s)u(s)ds\right] \tag{35}$$

例 5.5-2 考察由(4.7-25)中的矩阵确定的复系统。伴随系统矩阵 A^* 取如下形式

$$A^*=\bar{A}^T=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & -\frac{\bar{a}_0}{\bar{a}_n} \\ 1 & 0 & \cdots & -\frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots 1 & -\frac{\bar{a}_{n-1}}{\bar{a}_n} \end{bmatrix}$$

5.6. 时不变系统

在本节和下节中我们考察定常线性系统，并且介绍得出显式解的方法.尽管我们介绍了得到转移矩阵的“计算”技巧，然而我们这样做只是为了说明和引出另一些解析概念。我们的处理方法基本上是根据工程上近代的趋势。在假定大量的数值计算可以用数字或模拟计算机完成的情况下，我们着重于问题的分析方面。的确，数值计算本身就是一个研究的领域，但我们不想涉及这个内容。

矩阵指数式

我们将广泛地应用由无穷级数

$$e^{\mathbf{A}t} \triangleq \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \cdots + \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} + \cdots \tag{1}$$

形式地定义的矩阵指数式．此级数对一切 **A** 和固定的 t，以及对固定的 **A** 和一切 t 是存在的．此级数在任何有限区间内一致收敛，对一切有限 t 绝对收敛[Bellman,1960]，因此可逐项微分

$$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 t + \frac{\mathbf{A}^3 t^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^k t^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots$$

$$= \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}$$

$$= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A} \tag{2}$$

可以证明矩阵指数式满足基本关系式

$$e^{\mathbf{A}(t+s)} = e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}s} \tag{3}$$

只要指出此关系式的右边和左边的无穷级数相等，便可得出．证明留给读者作为练习．

我们还可断言，若 **AB**＝**BA** 则

$$e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} = e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t} \tag{4}$$

这就是说，当 **A** 与 **B** 可交换时关系式(4)是成立的．为了证明这个断言，我们看到

$$e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} = \mathbf{I} + (\mathbf{A}+\mathbf{B})t + \frac{(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2}{2!}t^2 + \cdots$$

又

$$e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t} = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \cdots\right)\left(\mathbf{I} + \mathbf{B}t + \frac{\mathbf{B}^2 t^2}{2!} + \cdots\right)$$

$$= \mathbf{I} + (\mathbf{A}+\mathbf{B})t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \mathbf{AB}t^2 + \frac{\mathbf{B}^2 t^2}{2!} + \cdots$$

作减法，得到

$$e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} - e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t} = (\mathbf{BA} - \mathbf{AB})\frac{t^2}{2} + \cdots$$

这就证明了此断言.

作为(3)式的推论,得出

$$e^{\mathbf{A}(t-t)}=e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}t}$$

因此

$$\mathbf{I}=e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}t} \tag{5}$$

所以我们证明了 $e^{\mathbf{A}t}$ 永远不会是奇异的并且它的逆就是 $e^{-\mathbf{A}t}$. 例 5.6-1 给出经常会遇到的矩阵指数式的一些封闭形式表达式. 留给读者去证明这些结果.

例 5.6-1 设 $\mathbf{D}$ 是元素为 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 的对角形矩阵, 因

$$\mathbf{D}^k=\begin{bmatrix} d_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{bmatrix}$$

得到

$$e^{\mathbf{D}}=\begin{bmatrix} e^{d_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{d_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{d_n} \end{bmatrix} \tag{6}$$

若 $\mathbf{J}_i=\lambda_i\mathbf{I}+\mathbf{H}_n$[参看(4.7-89)式]是约当块,则因 $\mathbf{H}_n^n=0$ 得到

$$e^{\mathbf{J}_it}=e^{\lambda_it}\begin{bmatrix} 1 & t & \dfrac{t^2}{2!} & \cdots & \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \dfrac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

自由系统

考察自由系统

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x},\quad \mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$$

其中 A 是 $n\times n$ 常数矩阵。此系统的自由运动由

$$\mathbf{x}(t)=\exp[\mathbf{A}(t-t_0)]\mathbf{x}(t_0) \tag{8}$$

给出。这就是说，定常系统的转移矩阵是矩阵指数式。因为如(2)式所表明的，矩阵指数式满足矩阵方程

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Phi}(t-t_0)=\mathbf{A}\mathbf{\Phi}(t-t_0),\quad \mathbf{\Phi}(0)=\mathbf{I} \tag{9}$$

正是定理 5.5-1 所要求的。所以由表达式 (8) 给出了自由运动。再考察下列例子。

$$
\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}
$$

立即得到

$$
\dot{z}_i=\lambda_i z_i
$$

$$
z_i=e^{\lambda_i(t-t_0)}z_i(t_0) \tag{11}
$$

如在例 4.7-3 和在第三章中看到的，对角形化一个矩阵的计算工作是相当大的。即使计算工作由数字计算机来作也有许多较有效的方法。在绝大多数情况，我们应当避开求解特征值的计算方法。

由方阵 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{P}$ 的关系

$$
(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P})^k=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}^k\mathbf{P} \tag{12}
$$

就能够建立矩阵指数式与解(11)之间的联系。所以，如果 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}$ 是对角形的，则得出

$$
e^{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}}=\mathbf{P}^{-1}e^{\mathbf{M}}\mathbf{P} \tag{13}
$$

或

$$
\mathbf{P}e^{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1}=e^{\mathbf{M}} \tag{14}
$$

(13)式说明了计算矩阵指数式的一个方法，但是它也涉及到特征值的计算，如下例所示。

例 5.6-3 计算 $e^{\mathbf{A}}$，其中 $\mathbf{A}$ 是斜对称矩阵

$$
\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta \\ 0 & \theta & 0 \end{bmatrix}
$$

特征值为 $\lambda_1=0$；$\lambda_2=-i\theta$，$\lambda_3=i\theta$。把矩阵 $\mathbf{A}$ 对角形化的矩阵 $\mathbf{U}$ 是酉矩阵

$$
\mathbf{U}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}
$$

因此，根据关系(14)，

$$e^{\mathbf{A}}=\mathbf{U}\begin{bmatrix} e^{0} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}\mathbf{U}^{*}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

强迫响应

定常(或时不变)系统

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u} \tag{15}$$

的运动由表达式(5.5-13)和(5.5-33)给出。方程(15)的转移矩阵是矩阵指数式，即

$$\mathbf{\Phi}(t,\ t_0)=e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$$

为了明显地指出转移矩阵仅依赖于时间差 $t-t_0$，记号

$$\mathbf{\Phi}(t-t_0)=e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \tag{16}$$

是经常使用的。因此为了得到强迫定常系统的解，表达式(5.5-13)或(5.5-33)是适用的，其转移矩阵由(16)式给出。

5.7. 脉冲响应函数矩阵与传递函数矩阵

考察由方程(4.7-24)定义的单输入单输出系统

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}+\mathbf{B}(t)u \tag{1}$$

$$y=\mathbf{C}(t)\mathbf{x} \tag{2}$$

运动 $\mathbf{x}$ 由表达式(5.5-13)给出。因此系统的响应给出为

$$y(t)=\mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t)$$

$$=\mathbf{C}(t)\mathbf{\Phi}(t,\ t_0)\mathbf{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\mathbf{C}(t)\mathbf{\Phi}(t,\ \xi)\mathbf{B}(\xi)u(\xi)d\xi \tag{3}$$

其中 $\mathbf{C}=[1\quad 0\quad \cdots\quad 0]$。

比较(3)式与(5.2-26)式，可以看出脉冲响应函数 $h(t,\ \xi)$可用矩阵方程给出为

$$h(t, \xi) = \mathbf{C}(t)\mathbf{\Phi}(t, \xi)\mathbf{B}(\xi) \tag{4}$$

并且根据关系(5.2-22)的结果，可看出零输入响应为

$$\mathbf{C}\mathbf{\Phi}(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \phi_{1i} x_i(t_0) \tag{5}$$

实际上(4)式说明单输入单输出系统的脉冲响应函数可表示为基函数 $\phi_{1i}(t, t_0)$的线性组合。特别是当 $n \times 1$ 矩阵 $\mathbf{B}$ 有元素 $b_1, b_2, \cdots, b_n$，时(4)式化为

在(11)式中令 $\mathbf{C}(t)=\mathbf{I}$ 及 $\mathbf{D}(t)=\mathbf{0}$ 得到的，在这个意义下(11)式比(8)式更一般。同样在这个意义下(12)式比(10)式更一般。

传递函数矩阵定义为脉冲响应矩阵的拉氏变换式。考察定常系统，于是关系(12)化为

$$\mathbf{H}_y(t-\tau)=\mathbf{C\Phi}(t-\tau)\mathbf{B} \tag{13}$$

因此

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_y(s)&=\mathscr{L}[\mathbf{H}_y(t)]=\mathbf{C}\mathscr{L}[\mathbf{\Phi}(t)]\mathbf{B}\\&=\mathbf{C\Phi}(s)\mathbf{B}\end{aligned} \tag{14}$$

上面的讨论推广了在§4.6和§5.2中讨论过的传递函数与脉冲响应的概念。我们来推出传递函数矩阵在定常系统求解上的应用。为此目的，取定常系统

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{Ax}+\mathbf{Bu}$$

的拉氏变换式，相继地有

$$\begin{aligned}s\mathbf{x}(s)-\mathbf{x}(0)&=\mathbf{Ax}(s)+\mathbf{Bu}(s)\\(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}(s)&=\mathbf{x}(0)+\mathbf{Bu}(s)\\\mathbf{x}(s)&=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)+(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{Bu}(s)\end{aligned} \tag{15}$$

由(15)看出 $(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)$ 是零输入响应而 $(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{Bu}(s)$ 是零态响应。显然

$$\mathbf{\Phi}(s)=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} \tag{16}$$

及

$$\mathbf{H}_x(s)=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \tag{17}$$

在下例中我们来说明传递函数矩阵的应用。

例 5.7-1 考察由流图 5.7-1 描述的系统。如图所示以 x_1 和 x_2 为状态变量，此系统的方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix} \tag{18}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ 0 & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{19}$$

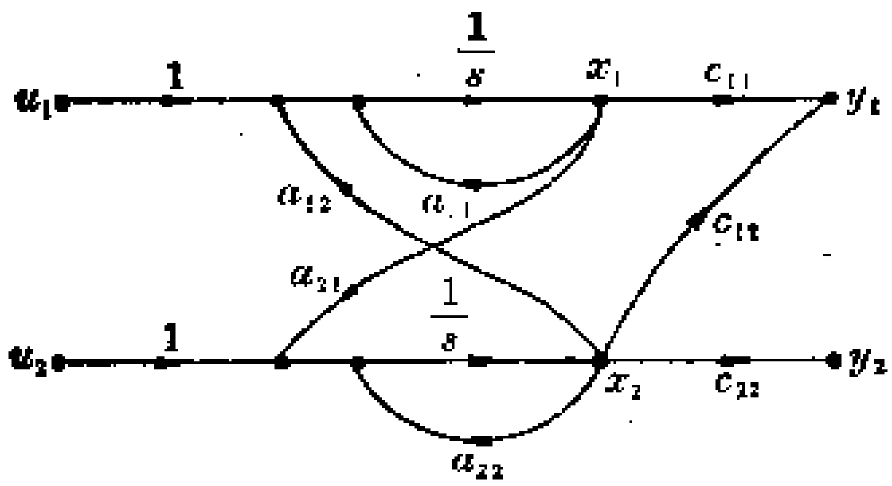


图 5.7-1　例 5.7-1 的流图。

按照方程(15)，我们必须求出矩阵

$$s\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix} s-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & s-a_{22} \end{bmatrix} \tag{20}$$

的逆。利用例 3.3-4 提出的方法，有

$$\mathbf{H}_x(s)=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\frac{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^*}{|s\mathbf{I}-\mathbf{A}|} \tag{21}$$

行列式

$$|s\mathbf{I}-\mathbf{A}|=s^2-(a_{11}+a_{22})s+a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

是矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征多项式。换言之，此行列式表示系统的特征方程。

易知

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^*=\begin{bmatrix} s-a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & s-a_{11} \end{bmatrix} \tag{22}$$

因此传递函数矩阵 $\mathbf{H}_x(s)$ 有元素

$$\begin{aligned} \frac{x_1(s)}{u_1(s)}&=h_{11}(s)=\frac{s-a_{22}}{|s\mathbf{I}-\mathbf{A}|} \\ \frac{x_1(s)}{u_2(s)}&=h_{12}(s)=\frac{a_{12}}{|s\mathbf{I}-\mathbf{A}|} \\ \frac{x_2(s)}{u_1(s)}&=h_{21}(s)=\frac{a_{21}}{|s\mathbf{I}-\mathbf{A}|} \\ \frac{x_2(s)}{u_2(s)}&=h_{22}(s)=\frac{s-a_{11}}{|s\mathbf{I}-\mathbf{A}|} \end{aligned} \tag{23}$$

(23) 式指出计算 $s\mathbf{I}-\mathbf{A}$ 的逆的另一种方法。例如元素 h_{12} 是 $x_1(s)$ 与 $u_2(s)$ 间的传递函数。一般，$h_{ij}(s)$是从第 j 个输入到第 i 个状态变量的传递函数。所以利用流图技术(梅逊方法，参看附录Ⅱ)，可写出

$$h_{ij}=\left(\frac{\sum_k T_k\Delta_k}{\Delta}\right)_{ij}$$

流图的行列式是

$$\Delta=1-\frac{a_{11}}{s}-\frac{a_{22}}{s}-\frac{a_{21}a_{12}}{s^2}+\frac{a_{11}a_{22}}{s^2}$$

为了求 h_{11}，写出

$$\left(\frac{\sum_k T_k\Delta_k}{\Delta}\right)_{11}=\frac{1}{s}\frac{\left(1-\frac{a_{22}}{s}\right)}{\Delta}$$

对于 h_{12}，可写出

$$\left(\frac{\sum_k T_k\Delta_k}{\Delta}\right)_{12}=\frac{a_{12}}{s^2\Delta}$$

其它项也容易算出。脉冲响应函数矩阵$\mathbf{H}_x(t)$的元素可由取逆拉氏变换式得到。

表达式(21)指出的求 $\mathbf{H}_x(s)$ 的方法，当系统的阶数大于 3 时

移矩阵及其一些性质．这些基本思想和概念是充分的基础，使得我们能进行更详细的研究．例如在下一章中我们详细地研究微分系统的运动．随之我们简略地讨论非线性微分系统的运动．

参考书目

Bellman, R.: *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1960.

Coddington, E. A., and N. Levinson: *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1955.

Hochstadt, H.: *Differential Equations: A Modern Approach*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1963.

Zadeh, L. A., and C. A. Desoer: *Linear System Theory*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1963.

习题

5.1．求微分方程

$$\ddot{y}+7\dot{y}+12y=0$$

的两个解。

5.2．在习题 5.1 中，设 $x_1=y$ 及 $x_2=\dot{y}$ 是状态变量．结合状态变量的这个选法，求基函数。

5.3．验证(5.2-8)式中解的线性组合是方程(5.2-2)的解．这证明解空间在加法下是封闭的吗？

5.4．考察微分系统

$$a\ddot{y}+b\dot{y}+cy=0$$

设 λ 是标量且用 λy 代替 y．系统是齐次的吗？下列系统是齐次的吗？

$$a\ddot{y}+b(\dot{y})^2+cy=0$$

5.5．验证习题 5.1 中的两个解是线性独立的。

5.6．考察 n 阶线性微分方程

$$a_n\frac{d^ny}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_0y=0$$

设 $x_1=y$，$x_2=\dot{y}$，等等．对状态变量的这个选法，求有关基函数的拉氏变换式。

5.7. 对状态变量的另一选法重做习题 5.6。

5.8. 下列系统

$$\dot{x}x+3tx=u$$

是线性的吗？系统是时不变的吗？它是齐次的吗？它是自由的吗？

5.9. 系统

$$\dot{x}+3tx=u$$

是自由的、线性的和(或)时不变的吗？它是自治的吗？

5.10. 系统

$$(\dot{x})^2+x=0$$

是自由的、线性的、时不变的和(或)自治的吗？

5.11. 求

$$\dot{x}+ax=u$$

的解。此系统有状态可分性吗？[参看关系式(5.4-5)]

5.12. 函数

$$x(t)=\frac{t_0x(t_0)}{t}+\int_{t_0}^{t}\frac{s}{t}u(s)ds$$

有状态可分性吗？

5.13. 设 $x_1=y$ 及 $x_2=\dot{y}$ 是状态变量并考察习题 5.1 中的系统。有关状态变量的这个选法写出矢量微分方程。利用习题 5.2 中已求得的基函数导出转移矩阵。

5.14. 考察下列矩阵

$$\Phi(t_2-t_1)=\begin{bmatrix}\cos(t_2-t_1) & 0 & -\sin(t_2-t_1)\\ 0 & 1 & 0\\ \sin(t_2-t_1) & 0 & \cos(t_2-t_1)\end{bmatrix}$$

利用三角恒等式验证关系式(5.5-10)成立。

5.15. 习题 5.14 中的矩阵是转移矩阵。利用关系式(5.5-10)求它的逆矩阵。矩阵是正交的吗？

5.16. 习题 5.14 中的转移矩阵是矩阵指数式。换言之，对某个常数矩阵 **A**，

$$\Phi(t_2,t_1)=e^{\mathbf{A}(t_2-t_1)}$$

从习题 5.14，Φ 的行列式为 1 这是显然的。关于 trace**A** 能得出什么结论？

(参看例 5.5-1.)

5.17. 试证 $(e^{A})^{T}=e^{A^T}$

5.18. 利用习题 5.17 的结果试证如果 $A+A^T=0$，则 e^A 是正常正交矩阵。

5.19. 利用两个无穷级数的相等验证关系式(5.6-3)。

5.20. 利用(5.6-4)式的结果试证关系式(5.6-3)。

5.21. 如果 H_n 定义为 $n\times n$ 矩阵

$$H_n=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ & & & \ddots & \\ & & & & 1\\ & & & & 0\end{bmatrix}$$

试证

$$e^{H_n t}=\begin{bmatrix}1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\\ 0 & 1 & t & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}.$$

5.22. 利用习题 5.21 的结果及(5.6-4)式试证表达式(5.6-7)。

5.23. 求由表达式(5.6-7)定义的 e^{Jt} 的行列式。求

$$\int_0^T e^{J_1(\xi)}d\xi$$

的行列式。

5.24. 利用例 5.5-1 的结果求例 5.6-3 中矩阵指数式的行列式。

5.25. 求 e^{At} 的拉氏变换式。

5.26. 试证系统 $\dot{x}=A(t)x$ 的转移矩阵由

$$\Phi(t,t_0)=\exp\int_{t_0}^{t}A(\lambda)d\lambda$$

给出当且只当 $A(t)$ 与 $\int_{t_0}^{t}A(\lambda)d\lambda$ 是可交换的。

5.27. 参考习题 5.26。试证如果 $A(t)$ 是常数矩阵，则 $A(t)$ 与它的积分是可交换的。当 $A(t)$ 是对角矩阵，$A(t)$ 与它的积分是可交换的吗?

5.28. 求例 5.6-1 中定义的 e^{Jt} 的拉氏变换式。

5.29. 验证表达式(5.5-13)满足状态可分性。

5.30. 试证表达式(5.5-13)对 **x** 及 **u** 二者是线性的。

5.31. 求矩阵微分方程

$$\dot{\mathbf{C}}=\mathbf{AC}+\mathbf{CB} \qquad \mathbf{C}(t_0)=\mathbf{C}_0$$

的解，其中 **A** 与 **B** 都是常数矩阵。[提示：假设有形如 $\mathbf{C}=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{Z}$ 的解。]

5.32. 利用拉氏变换试解微分系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

5.33. 用系统的对角形化求解习题 5.32 中的微分系统。

5.34. 求系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

的转移矩阵。

5.35. 习题 5.34 中的系统的伴随系统是什么系统？求伴随系统的转移矩阵。对习题 5.34 的系统及其伴随系统验证(5.5-26)及(5.5-27)成立。

5.36. 利用例 5.7-1 中提出的方法，求由流图表出的系统的转移矩阵。其状态变量如图 P 5.36 所示

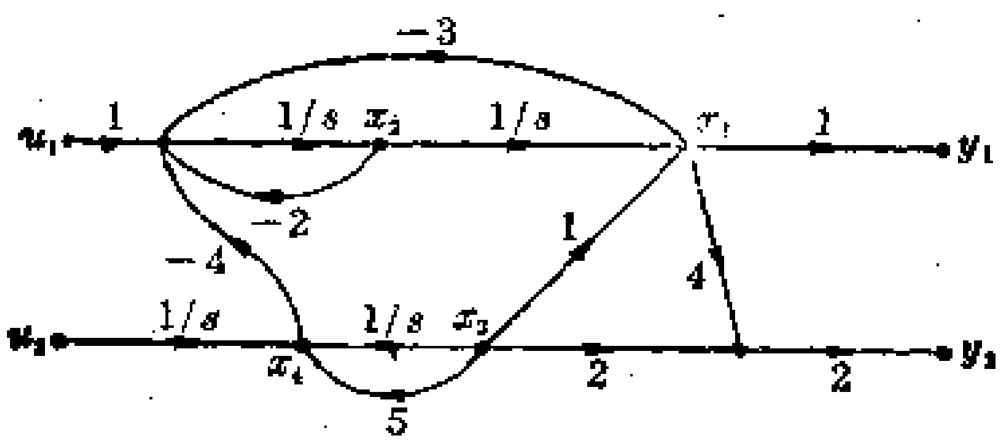


图 P.5.36

5.37. 求习题 5.36 中系统的传递函数矩阵。

5.38. 习题 5.36 中的系统是纯动态系统吗？换言之，直传输矩阵 **D** 是零吗？

附录 I　拉氏变换简表

拉氏变换式定义为①

$$\mathscr{L}[f(t)] \triangleq F(s) \triangleq \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$f(t)$	$\mathscr{L}[f(t)]$
$\dfrac{df(t)}{dt}$	$sF(s)-f(0^+)$
$\dfrac{d^2f(t)}{dt}$	$s^2F(s)-sf(0^+)-\dfrac{df(0^+)}{dt}$
$\int_0^t f(t)dt$	$\dfrac{1}{s}F(s)+\dfrac{1}{s}\int_{\infty}^{0}f(t)dt$
$\delta(t-a)$（脉冲函数）	e^{-sa}
$1(t-a)$（单位阶跃函数）	$\dfrac{1}{s}e^{-sa}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$
$t^n(n=0,1,2,\cdots)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\dfrac{1}{s+a}$
$\cos\omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at}f(t)$	$F(s)\vert_{s\to s+a}$

① C. R. Wylie, Jr., *Advanced Engineering Mathematics*, 3 d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.

附录Ⅱ　方框图与信流图

Ⅱ.1. 方框图

如§ 1.2 所指出的，系统的输入输出观念基本上是与因果律相联系的。通常输入变量相当于原因，而输出变量相当于效果。这个情况可用符号表示为图Ⅱ-1 的方框图。符号 u 表示输入变量，y 表示输出变量。箭头简明地指出从输入到输出的单向流动。方框表示一个元件或一个系统，而 S 是一个抽象的符号它表示元件的函数或系统。用符号表示，写成

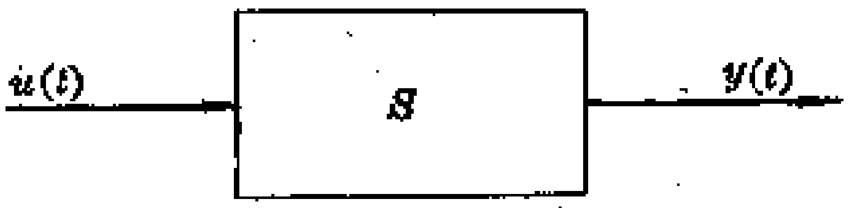


图 Ⅱ-1. 系统或元件的方框图.

$$y(t)=S(u)$$

指明输出 y 依赖于系统 S 及输入 u。

在一些情况，当 S 通过函数关系给定时，我们可用一个显函数代替 S，例如

$$y=S(u)=u^2$$

换言之，此系统是一个平方装置(图Ⅱ-2a)，而图Ⅱ-2b 中的系统是一个积分装置，即

$$y=\int u(\xi)d\xi$$

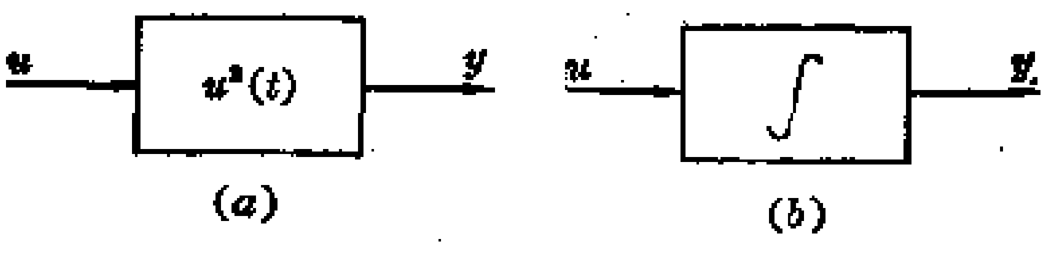


图 Ⅱ-2. 方框图的例子.

像以前所说的，一个系统是元件(或子系统)的结合。对应于每一个元件或子系统的是一个关联的运算 S_i，如图Ⅱ-3 a 所示。对应于每一个元件指定关联的下标 i 于每一个输入与输出变量。

元件或子系统可用各种方式联结成一个系统．在图Ⅱ-3 b 中假定 $y_1=u_2$ 及 $y_2=u_3$，并说元件 S_1、S_2 与 S_3 是受串联约束的．在这个情况，系统表成下列数学模型：

$$y_1=S_1[u_1],\qquad y_2=S_2[y_1],\qquad y_3=S_3[y_2]$$

为方便起见，图Ⅱ-3 b 中的系统可以表成单个方框，如图Ⅱ-3 c．这时符号 S 被用来表示这个系统．

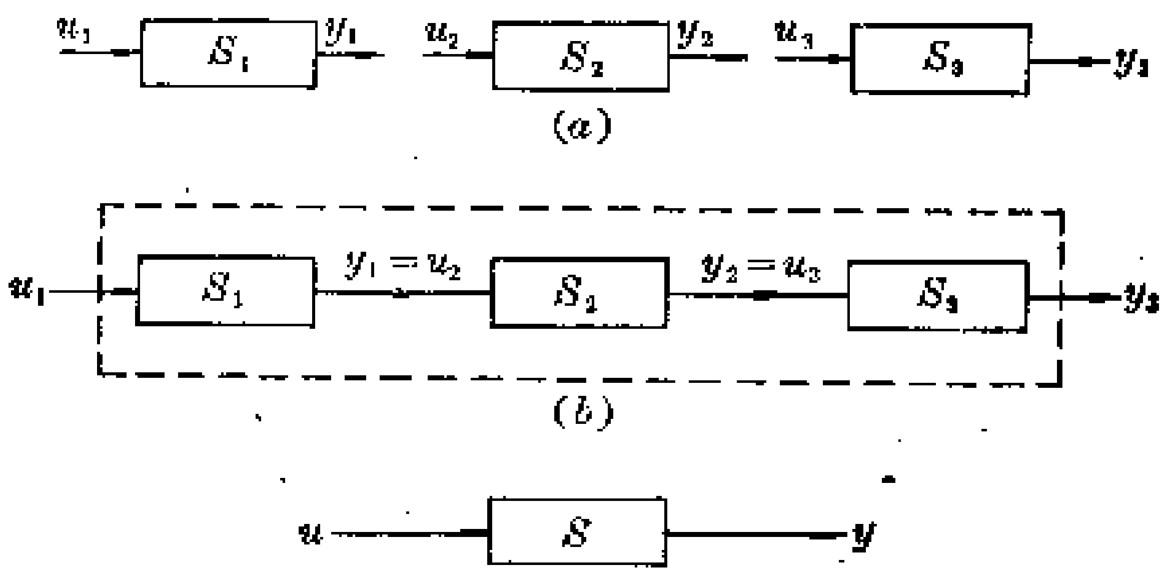


图 Ⅱ-3．三个元件或子系统串联成单个系统．

两个元件可以受同一输入约束，如图Ⅱ-4 a．数学上，这个约束导向关系式

$$u_1=u,\qquad u_2=u$$

及

$$y_1=S_1[u],\qquad y_2=S_2[u]$$

受如图Ⅱ-4 a 约束的两个元件 S_1 与 S_2 称为对输入是并联的．

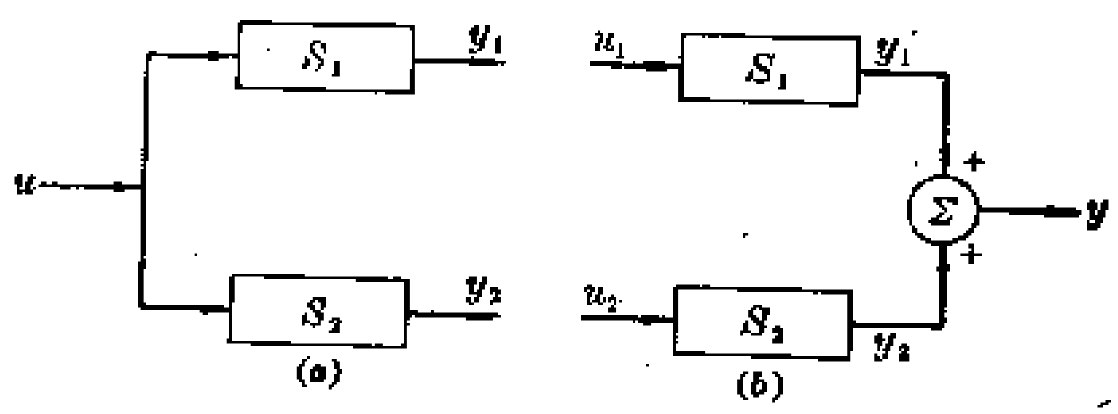


图 Ⅱ-4．两个元件或系统的并联．

图Ⅱ-4 b 中的 Σ 表示一个加法器；输出 y 是输入 y_1 与 y_2 的

和，即

$$y = y_1 + y_2$$

正号与负号写在箭头旁是为了指出对应的变量相加或相减.

Ⅱ.2. 信流图

信流图的基本性质可从方框图符号体系推出. 我们较喜用如图Ⅱ-5所示的更简单的记号. 这里限于表示线性系统. 如将要看到的，只需要两个图示元件：结点用以标志变量，有向支路用以标志两个变量之间的因果关系. 所以结点只是支路的端点. 为要说明这种想法，考察关系式

$$y_2 = k y_1 \tag{Ⅱ-1}$$

其中k是一个任意常数，被认为是支路增益. 为了作出这个关系式的流图，首先需要选取变量. 如果认为 y_1 是原因而 y_2 是效果，合适的信流图如图Ⅱ-5 a 所示. 如图所示把结点配上变量 y_1 与 y_2，两个结点的联线就是有向支路. 箭头指示从输入到输出或从原因到效果的方向. 有向支路的增益 k 要写在尽可能靠近箭头处. 记号 k 习惯上称为从结点 y_1 到结点 y_2 的增益. 一般，一个系统将

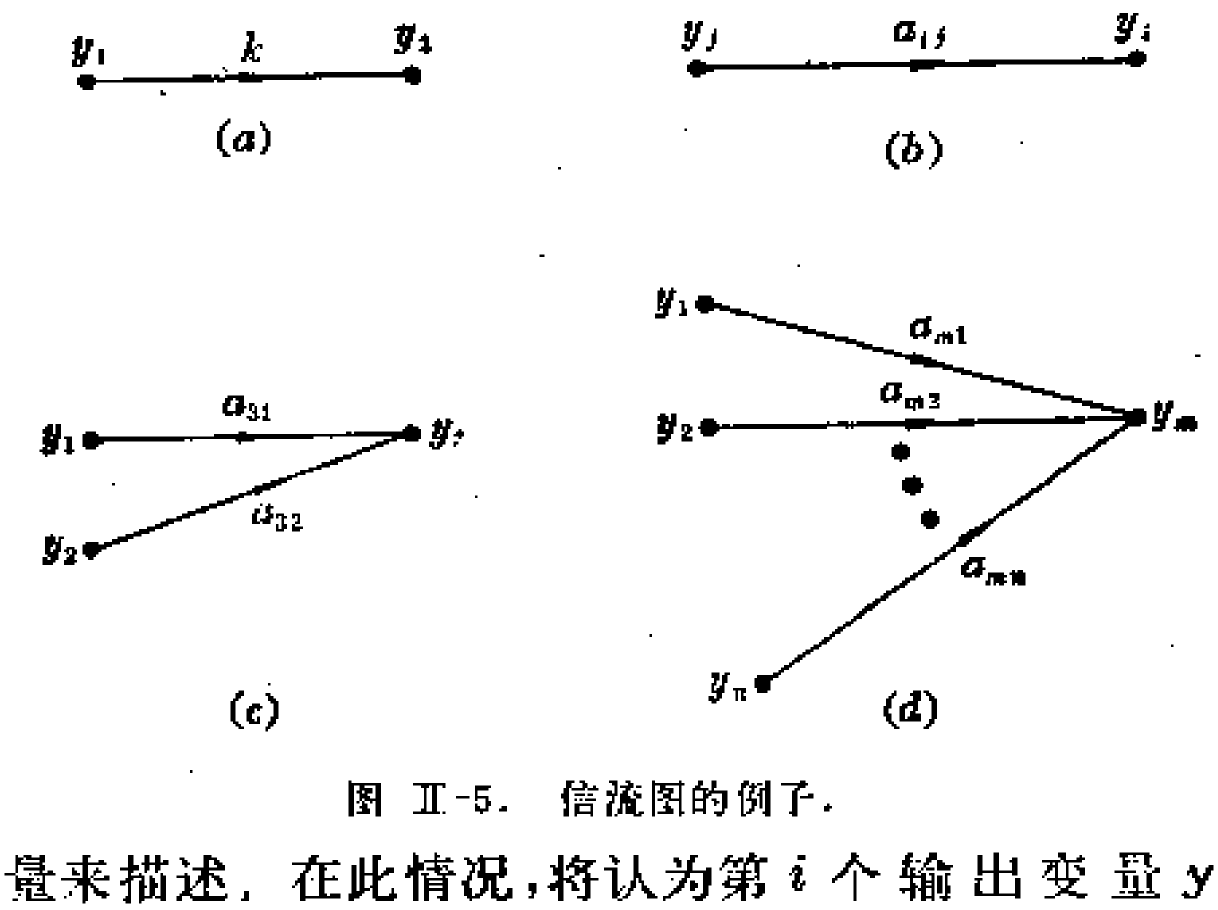


图 Ⅱ-5. 信流图的例子.

用许多变量来描述. 在此情况，将认为第 i 个输出变量 y_i 与第 j 个输入变量 y_j 具有关联增益 a_{ij}，如图Ⅱ-5 b所示. 第一个下标

i 指输出，而第二个下标 j 指输入。

通常，一个变量，比如 y_3 是两个变量的和，其数学表示式为

$$y_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 \tag{Ⅱ-2}$$

这个关系的符号表示如图Ⅱ-5 c。这个想法很容易推广到关系式

$$y_m = a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{mn}y_n \tag{Ⅱ-3}$$

它被表示在图Ⅱ-5 d 中。方程(Ⅱ-1)到(Ⅱ-3)称为结点方程，从方程(Ⅱ-2)及(Ⅱ-3)，我们注意到结点是用作相加装置。这就是说，当几个分支会于一个结点，在结点的变量是个别信号($a_{ij}y_j$)到达该结点的总和。

两个信号可从一个结点流出而止于两个其它结点，如图Ⅱ-6 a 所示。在此情况结点方程写成

$$y_2 = a_{21}y_1$$

$$y_3 = a_{31}y_1$$

其次，如果两个元件是串联的，如图Ⅱ-6 b 所示，则有

$$y_2 = a_{21}y_1$$

$$y_3 = a_{32}y_2$$

这些方程可联结成等价表达式

$$y_3 = a_{21}a_{32}y_1$$

有时一个支路可以自身封闭，如图Ⅱ-6 c 所示。这个图的数学表示是

$$y_2 = a_{22}y_2 + a_{21}y_1$$

其中 a_{22} 是自身封闭支路的增益。

在一般系统中，元件的一个复杂联结可按各种方法互相作用。利用上面的符号体系一般就能够表出复杂系统。今作出下列关于几条支路

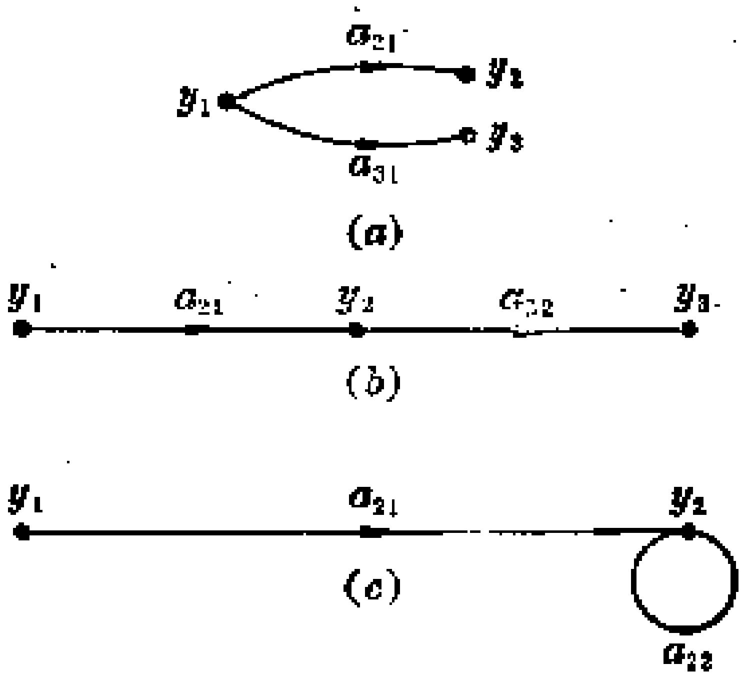


图 Ⅱ-6. 信流图的例子.

与几个结点联结的附加定义。

与系统输入关联的变量的结点称为源结点，通常记作$u_1, u_2, \cdots$；没有信号流入源结点。

与系统输出关联的变量的结点称为洞结点，通常记作$y_1, y_2, \cdots$；没有信号从洞结点流出。系统中的任一其它结点可以当作洞结点对待，只要附加一条增益为1的流出的支路，它终止于洞结点，如图Ⅱ-7所示。

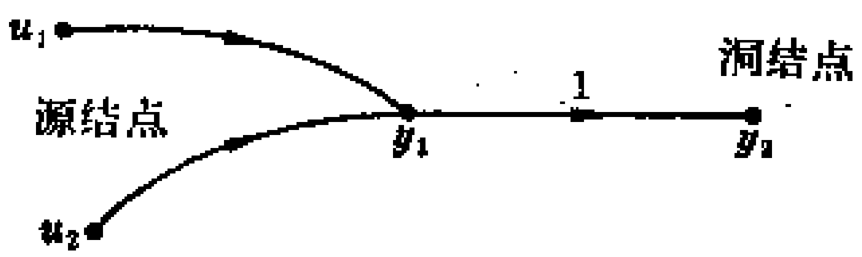


图 Ⅱ-7. 具有两个源结点及一个洞结点的简单流图.

在一个互连元件的系统中，定义一条道路为任意一串连结的支路，它们的箭头是单向的。两个结点之间的正向道路是任一道路，沿着它前进，没有一个结点会遇上超过一次。两个结点之间可能不止一条正向道路。在图Ⅱ-7所表的系统中认为有两条正向道路，一条从u_1到y_1再到y_2，另一条从u_2到y_1再到y_2。因此正向道路是一串结点串联而成的，而道路从始结点到终结点的增益是沿正向道路所遇到的一切支路增益的乘积。考察下列例子，它有两条正向道路，而两者的始结点与终结点都是相同的。

例 Ⅱ-1. 从下面的数学模型

$$y_1 = b_{11}u_1$$

$$y_2 = a_{21}y_1$$

$$y_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2$$

$$y_4 = y_3$$

我们能作出流图如图Ⅱ-8所示。它有两条正向道路。它们都从结点u_1出发又都止于结点y_4。一条正向道路按$u_1 \to y_1 \to y_3 \to y_4$流动，并且求得它对应的增益是

$$G_1 = b_{11}a_{31}$$

另一条道路按$u_1 \to y_1 \to y_2 \to y_3 \to y_4$流动，并且求得对应的增益是

$$G_2 = b_{11}a_{21}a_{32}$$

另一必须考察的特殊道路是回路．回路是一个道路，它开始与终止在同一结点上，并且经过其它结点不超过一次．一个简单例子如图Ⅱ-6 c 所示。回路增益是沿回路所遇到的一切支路增益的乘积。

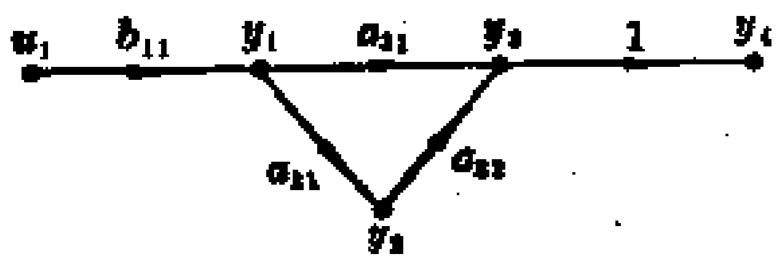


图 Ⅱ-8． 例Ⅱ-1 中的数学模型的流图．

这些概念在下面例子中说明之．

例 Ⅱ-2． 考察图Ⅱ-9a 的方框图．由方框图写出系统方程为

$$y_1 = -y_3 + u$$

$$y_2 = H_1 y_1$$

$$y_3 = H_2 y_2$$

图Ⅱ-9b 及 c 是等价的信流图．联系到图Ⅱ-9b 到 c，我们就得到等价关系

$$a_{21} = H_1$$

$$a_{12} = -H_2$$

因此从图Ⅱ-9c 得到

$$y_1 = a_{12} y_2 + u$$

$$y_2 = a_{21} y_1 \qquad (\text{Ⅱ-4})$$

$$y_4 = y_2$$

对应于 $y_4 = y_2$ 的附加支路是包括在内的，因而系统的输出是与洞结点一致的．从系统的输入 u 到系统的输出 y_4 的正向道路增益是

$$a_{21} = H_1$$

从 y_1 出发终止于 y_1 的回路增益是 $\quad a_{12}a_{21} = -H_2H_1$

如果从方程(Ⅱ-4)中消去 y_1 与 y_2，则输出 y_4 可只用输入变量 u 写出，得

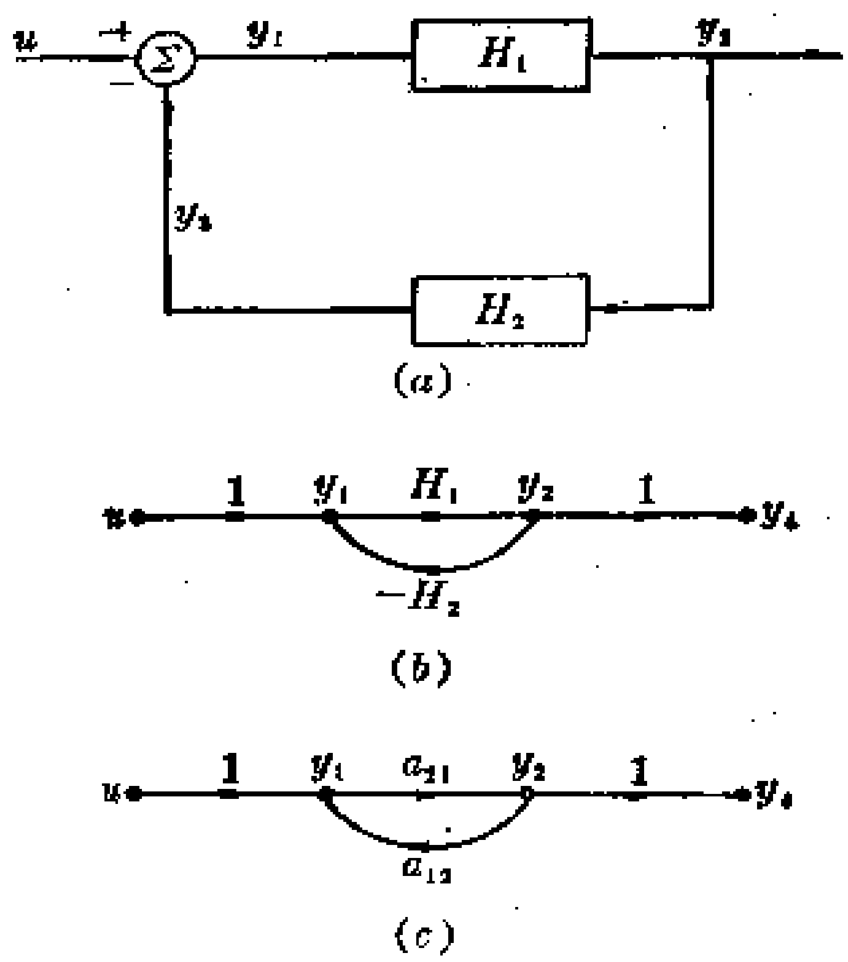


图 Ⅱ-9．例Ⅱ-2 中系统的方框图与等价的信流图．

$$y_4=\frac{a_{11}}{1-a_{12}a_{21}}u$$

$$=\frac{H_1}{1+H_2H_1}u \qquad (\text{II}-5)$$

现在考察更一般的系统，即一个具有 p 个输入变量 $u_1, u_2, \cdots, u_p$ 及 m 个输出变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 的系统，如图 II-10 所示．如上面所指出的，一切输入变量都作为源结点而一切输出变量都作为洞结点。

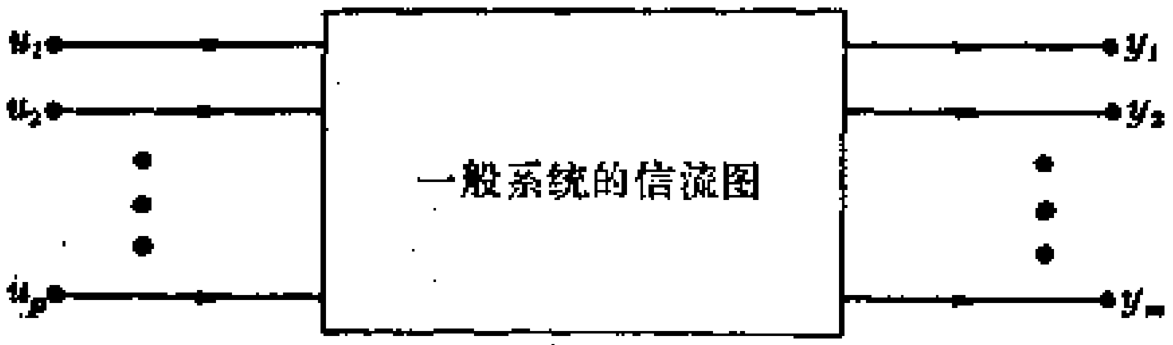


图 II-10． p 个输入与 m 个输出的一般信流图．

就此而言，对每一个输出结点或不是源结点的任一结点，可写出下列结点方程

$$y_1=a_{11}y_1+a_{12}y_2+\cdots+a_{1m}y_m+b_{11}u_1+b_{12}u_2+\cdots+b_{1p}u_p$$

$$y_2=a_{21}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{2m}y_m+b_{21}u_1+b_{22}u_2+\cdots+b_{2p}u_p$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_m=a_{m1}y_1+a_{m2}y_2+\cdots+a_{mm}y_m+b_{m1}u_1+b_{m2}u_2+\cdots+b_{mp}u_p$$

$$(\text{II}-6)$$

增益 a_{ij} 是从第 j 个非源结点到第 i 个非源结点的支路增益．增益 b_{ij} 是从第 j 个源结点到第 i 个非源结点的支路增益．某些增益项可以是零，此时流图中对应的支路不出现． 每一个输出变量 y_i 被认为是因变量(效果)，而每一个输入变量 u_i 被认为是自变量(原因)．方程(II-6)称为线性方程组的结点形式．如下面例子所说的，任何线性方程组能够写成结点形式．

例 II-3． 考察图II-11a 中的电路，其中 u_1 与 u_2 分别对应于电源的电

压，而 y_1 与 y_2 对应于电流。合理的电路方程是

$$\begin{aligned}(Z_1+Z_{12})y_1+Z_{12}y_2&=u_1\\ Z_{12}y_1+(Z_2+Z_{12})y_2&=u_2\end{aligned}\tag{Ⅱ-7}$$

电路方程也可写成

$$\begin{aligned}y_1&=-\frac{Z_{12}}{Z_1+Z_{12}}y_2+\frac{1}{Z_1+Z_{12}}u_1\\ y_2&=-\frac{Z_{12}}{Z_2+Z_{12}}y_1+\frac{1}{Z_2+Z_{12}}u_2\end{aligned}\tag{Ⅱ-8}$$

或

$$\begin{aligned}y_1&=a_{12}y_2+b_{11}u_1\\ y_2&=a_{21}y_1+b_{22}u_2\end{aligned}\tag{Ⅱ-9}$$

其中

$$a_{12}=-\frac{Z_{12}}{Z_1+Z_{12}},\qquad b_{11}=\frac{1}{Z_1+Z_{12}}$$

$$a_{21}=-\frac{Z_{12}}{Z_2+Z_{12}},\qquad b_{22}=\frac{1}{Z_2+Z_{12}}$$

对应于方程（Ⅱ-9）的流图是图Ⅱ-11b。注意到结点形式（Ⅱ-8）不是唯一的。因为方程(Ⅱ-7)也可以写成下列方程

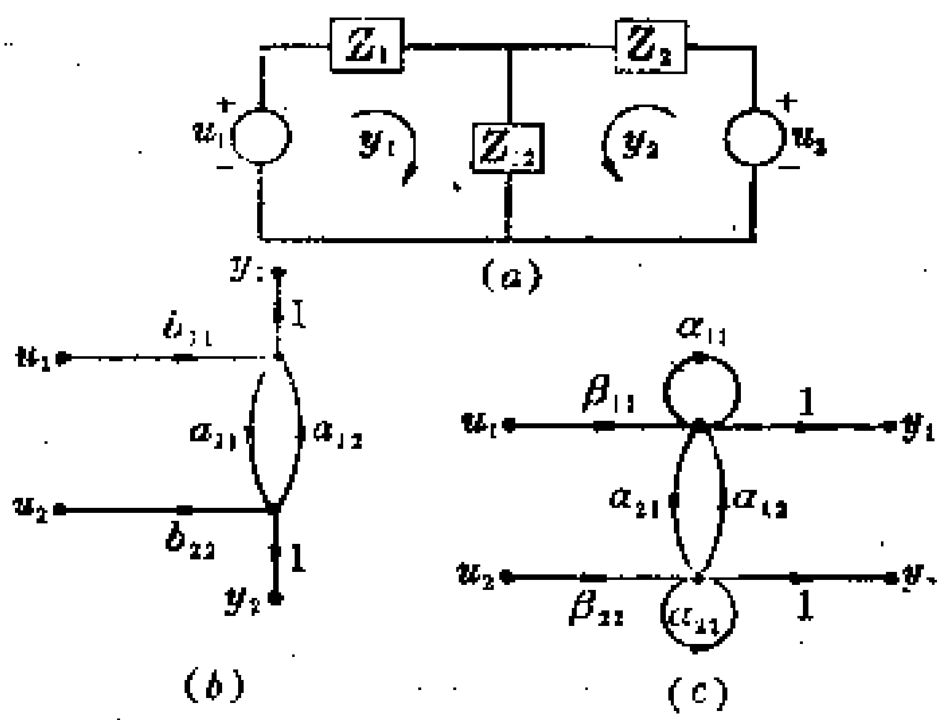
$$\begin{aligned}y_1&=-\frac{Z_1}{Z_{12}}y_1-y_2+\frac{1}{Z_{12}}u_1\\ y_2&=-y_1-\frac{Z_2}{Z_{12}}y_2+\frac{1}{Z_{12}}u_2\end{aligned}\tag{Ⅱ-10}$$

或

$$\begin{aligned}y_1&=\alpha_{11}y_1+\alpha_{12}y_2+\beta_{11}u_1\\ y_2&=\alpha_{21}y_1+\alpha_{22}y_2+\beta_{22}u_2\end{aligned}$$

对应于方程(Ⅱ-10)的流图是图Ⅱ-11c。

例Ⅱ-3 说明了一个给定的线性方程组可以表示为各种等价流图。这意味着任一流图可以化为或改变成另一等价形式。流图化简的对应物就是方程的代数处理。某些流图可以处理得较其它等价流图更简单些。如果用正常的简化手续能求得一个简单的等价形式，则输出变量依赖于输入变量的显式表示由观察就能写出



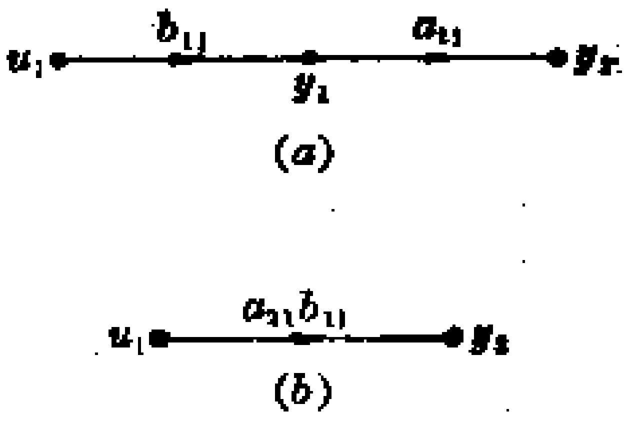


图 Ⅱ-11. 简单电路与两个等价的流图.　图Ⅱ-12. 两个等价流图的例子.

来．简化通常是消去一些变量，如图Ⅱ-12所示．两条支路是串联的，变量 y_1 可以消去，两条支路可以用一条支路来代替，其增益为 $a_{21}b_{11}$．观察图Ⅱ-12立即推出

$$y_2=a_{21}b_{11}u_1$$

下面的例子要说明一个更复杂的问题。

例 Ⅱ-4. 图Ⅱ-13a中的系统的流图有两个源结点及四个非源结点。今要把 y_4 表成只依赖于 u_1 与 u_2。消去结点 y_2 得到等价流图Ⅱ-13b。其次，消去结点 y_1 与 y_3 得到等价流图Ⅱ-13c。最后，观察流图Ⅱ-13c，写出

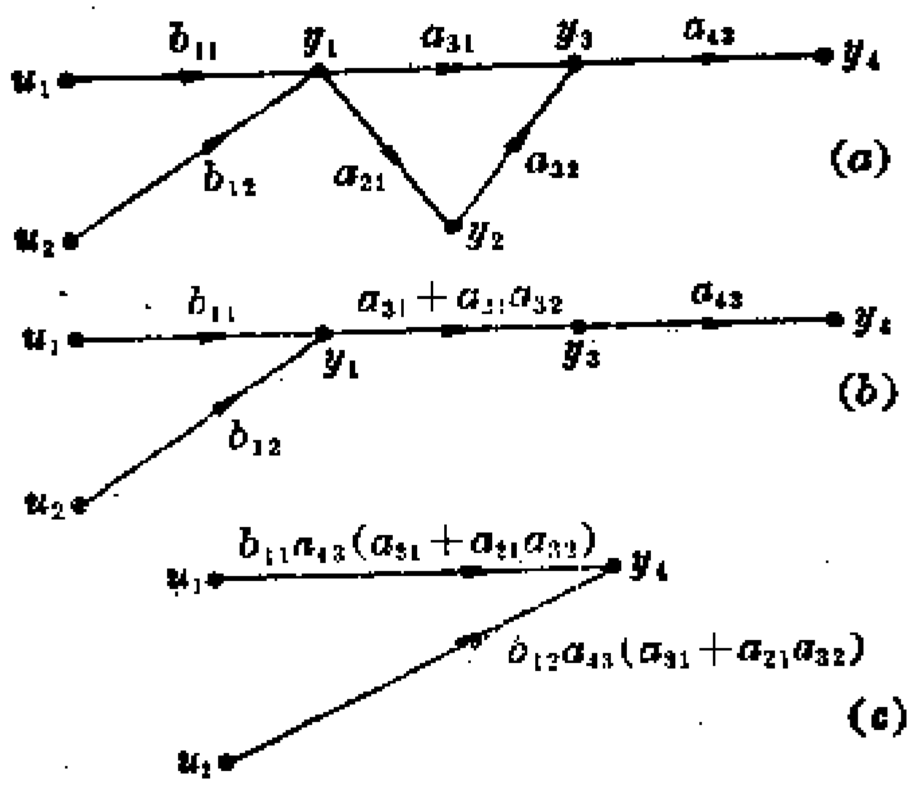


图 Ⅱ-13. 信流图的简化.

$$y_4=b_{11}a_{43}[a_{31}+a_{32}a_{21}]u_1+b_{12}a_{43}[a_{31}+a_{32}a_{21}]u_2$$

Ⅱ.3. 梅逊简化公式

在例Ⅱ-4中已说到简化流图的方法。与其推广这些方法不如

把简化方法系统化，后者是由梅逊发展起来的①．梅逊建立了一个一般的简化公式使得相对复杂流图的传递系数或增益都能用观察方法写出来．为了说明梅逊简化公式，考察只有一个输入与一个输出的系统．这个思想可直接推广到多输入多输出系统．

梅逊公式给出源结点 u 与洞结点 y 之间的增益 G 依赖于居间支路增益的显式表达式，即

$$y=Gu \tag{Ⅱ-11}$$

其中

$$G=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{q}G_k\Delta_k \tag{Ⅱ-12}$$

量 Δ 称为流图行列式，量 Δ_k 称为道路因子，而量 G_k 是道路增益．诸量可计算如下：

Δ＝1－所有单个回路增益的和＋两个不接触回路所有可能组合的增益乘积的和－三个不接触回路所有可能组合的增益乘积的和＋…四个…－…五个…＋…

或

$$\Delta=1-\sum_i p_{i1}+\sum_i p_{i2}-\sum_i p_{i3}+\cdots+(-1)^r\sum_i p_{ir}$$

其中 p_{ir}＝r 个不接触回路的第 i 个可能组合的增益乘积．

又

Δ_k＝不接触第 k 个正向道路的部分流图的 Δ 值，即考察不接触第 k 个正向道路的一切回路．

G_k＝第 k 个正向道路的增益．

q＝正向道路的个数．

术语接触回路是指至少有一个公共结点的回路．

---

① 证明参看 L. A. Zadeh and C. A. Desoer, *Linear System Theory*, P. 462, Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1963.

若系统有多个输入$u_1,u_2,\cdots,u_p$,对于任何多个可能的输出，其输出表达式是

$$y=G^1u_1+G^2u_2+\cdots+G^pu_p$$

其中各个增益G^i由公式(Ⅱ-12)计算.对应的正向道路从源结点u_i出发终止于阱结点y。要注意到Δ只依赖于回路增益。

乍一看来，梅逊公式可能显得较复杂，然而略经实践就不会觉得有困难了。唯一的最大危险是对回路或正向道路的忽略。在较复杂的系统中这是经常容易弄含糊的。读者通过下列例子的研究可以有所体会。

例 Ⅱ-5. 考察图Ⅱ-14中的系统。看出这个系统有一条正向道路及一个回路。利用梅逊公式可写

$$y_4=\frac{a_{21}(1-0)}{1-a_{12}a_{21}}u_1=\frac{H_1}{1+H_1H_2}u_1$$

它与例Ⅱ-2的结果是一致的。

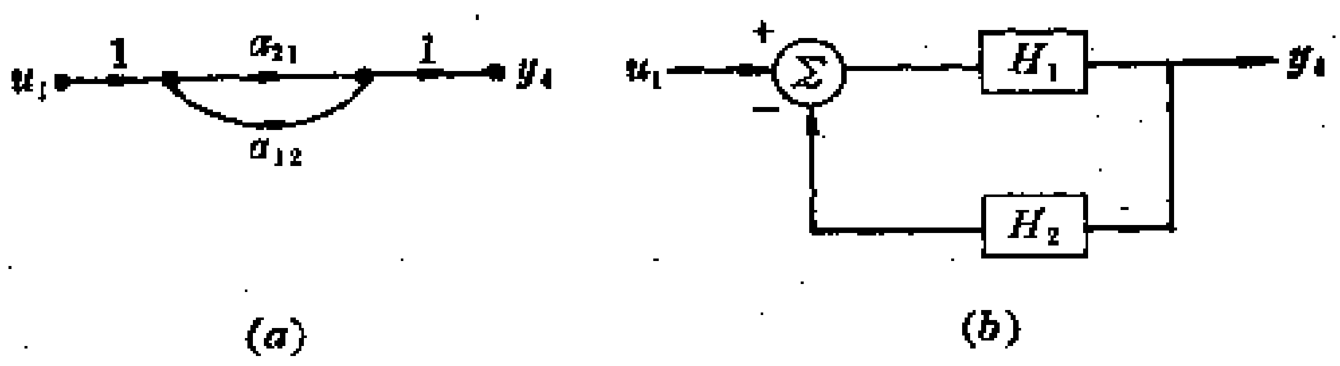


图 Ⅱ-14. 例Ⅱ-5中系统的流图及方框图.

例 Ⅱ-6. 考察图Ⅱ-15a中的系统。它有两条正向道路及两个回路，后者在途中是接触的，因为它们有一个公共结点y_2。观察流图可求出下列各量：

$$\Delta=1-a_{21}a_{12}-a_{22}$$
$$G_1=b_{11}a_{31}a_{43}$$
$$G_2=b_{11}a_{21}a_{32}a_{43}$$
$$\Delta_1=1-a_{22}$$

$$\Delta_2=1$$

因此

$$G=\frac{a_{43}a_{31}b_{11}(1-a_{22})+a_{43}a_{32}a_{21}b_{11}}{1-a_{21}a_{12}-a_{22}}$$

及

$$y_4=Gu_1$$

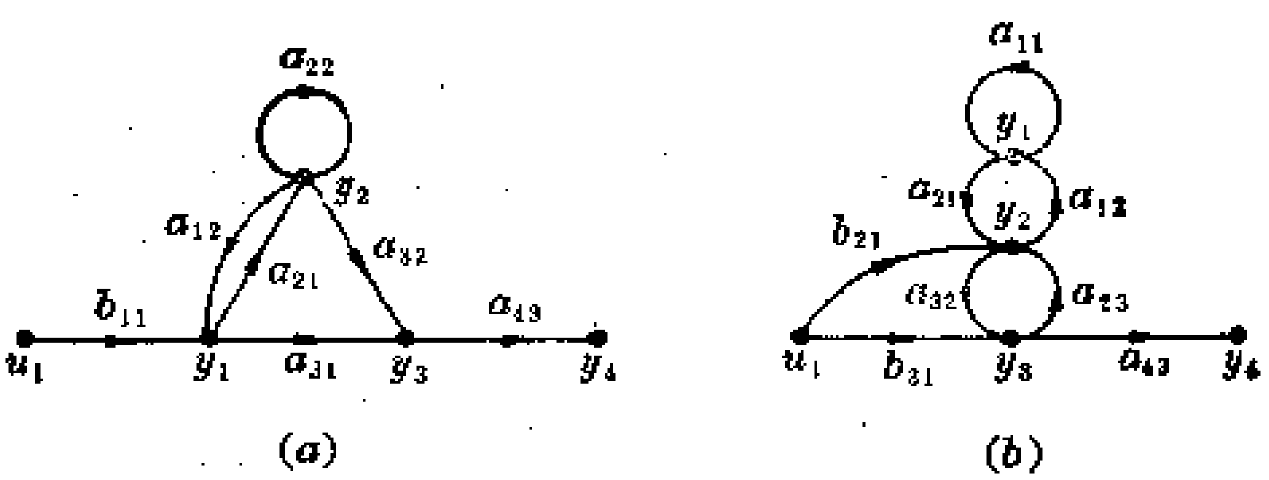


图 Ⅱ-15. 例Ⅱ-6 与Ⅱ-7 的流图.

例 Ⅱ-7. 图Ⅱ-15b 中的系统，在 u_1 与 y_4 之间的增益可计算如下. 系统有两条正向道路与三个回路，其中的两个是不接触的，所以可写出

$$\Delta=1-a_{11}-a_{21}a_{12}-a_{32}a_{23}+a_{11}a_{32}a_{23}$$

$$G_1=b_{31}a_{43}$$

$$G_2=b_{21}a_{32}a_{43}$$

$$\Delta_1=1-a_{11}-a_{21}a_{12}$$

$$\Delta_2=1-a_{11}$$

及

$$G=\frac{a_{43}b_{31}(1-a_{11}-a_{21}a_{12})+a_{43}a_{32}b_{21}(1-a_{11})}{1-a_{11}-a_{21}a_{12}-a_{32}a_{23}+a_{11}a_{32}a_{23}}$$

例 Ⅱ-8. 从流图到方框图的转换是容易做到的. 应用梅逊公式，只有正向道路与回路需要认清，这是容易从方框图的检查中完成的. 在这个例子中，系统是由图Ⅱ-16 的方框图表出的. 此系统有两个输入 u_1 与 u_2. 我们的目的是要求 y 依赖于 u_1 与 u_2 的表达式. 这个系统有两个回路，它们是接触的，并且对每一个输入变量有一条正向道路. 输出变量 y 可求得为

$$y=G^1u_1+G^2u_2$$

其中

$$G^1=\frac{H_1H_2H_3}{1+H_1H_2H_3H_5+H_2H_3H_4}$$

及

$$G^2=\frac{H_3}{1+H_1H_2H_3H_5+H_2H_3H_4}$$

注意每一个增益 G^1 与 G^2 有同样行列式 Δ。

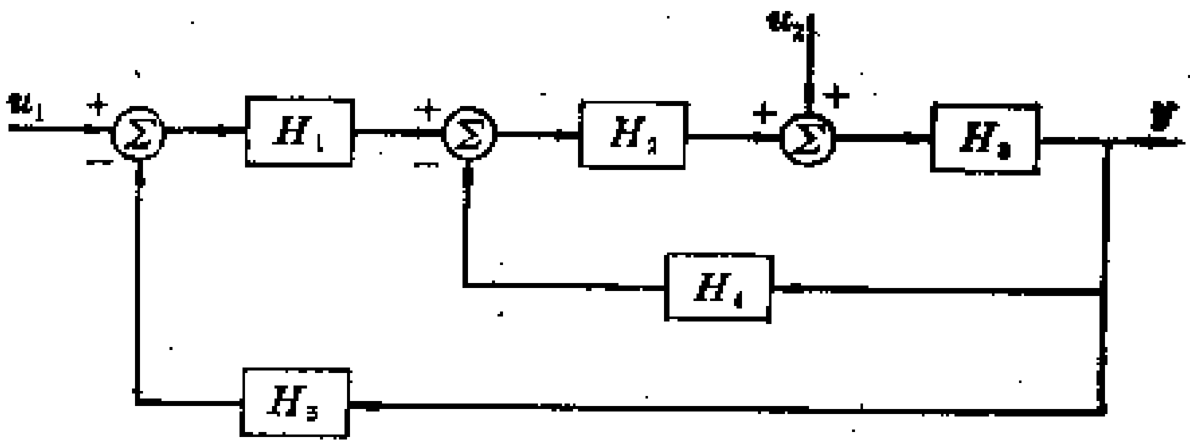


图 Ⅱ-16. 具有两个输入的系统的方框图。

例 Ⅱ-9. 用梅逊公式可求线性方程组的解。考察下列线性方程组:

$$a_{11}y_1+a_{12}y_2=u_1$$

$$a_{21}y_1+a_{22}y_2=u_2$$

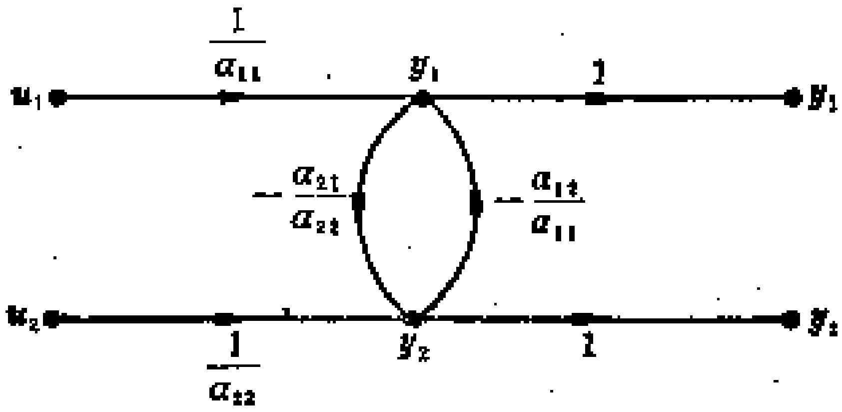


图 Ⅱ-17. 例Ⅱ-9 中线性方程的流图。

它可改写成下列形式

$$y_1=-\frac{a_{12}}{a_{11}}y_2+\frac{1}{a_{11}}u_1$$

$$y_2=-\frac{a_{21}}{a_{22}}y_1+\frac{1}{a_{22}}u_2$$

对应的流图在图Ⅱ-17 中。y_1 与 y_2 的显式表示可求得是

$$y_1=\frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}u_1-\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}u_2$$

$$y_2=\frac{-a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}u_1+\frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}u_2$$

习　题

Ⅱ.1. 作出图 PⅡ.1 中方框图的流图,并求从 $R(s)$ 到 $C(s)$ 的增益。

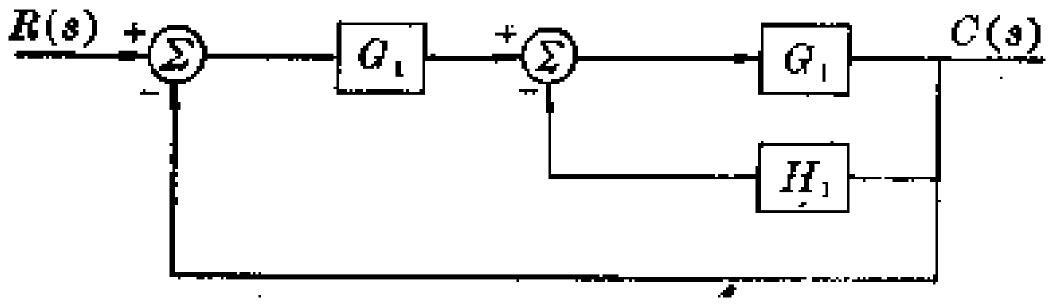


图 PⅡ.1. 习题Ⅱ.1 的方框图。

Ⅱ.2. 对图PⅡ.2. 中每一个流图，求 y 依赖于 u 的表达式及从 u 到 y 的支路增益。

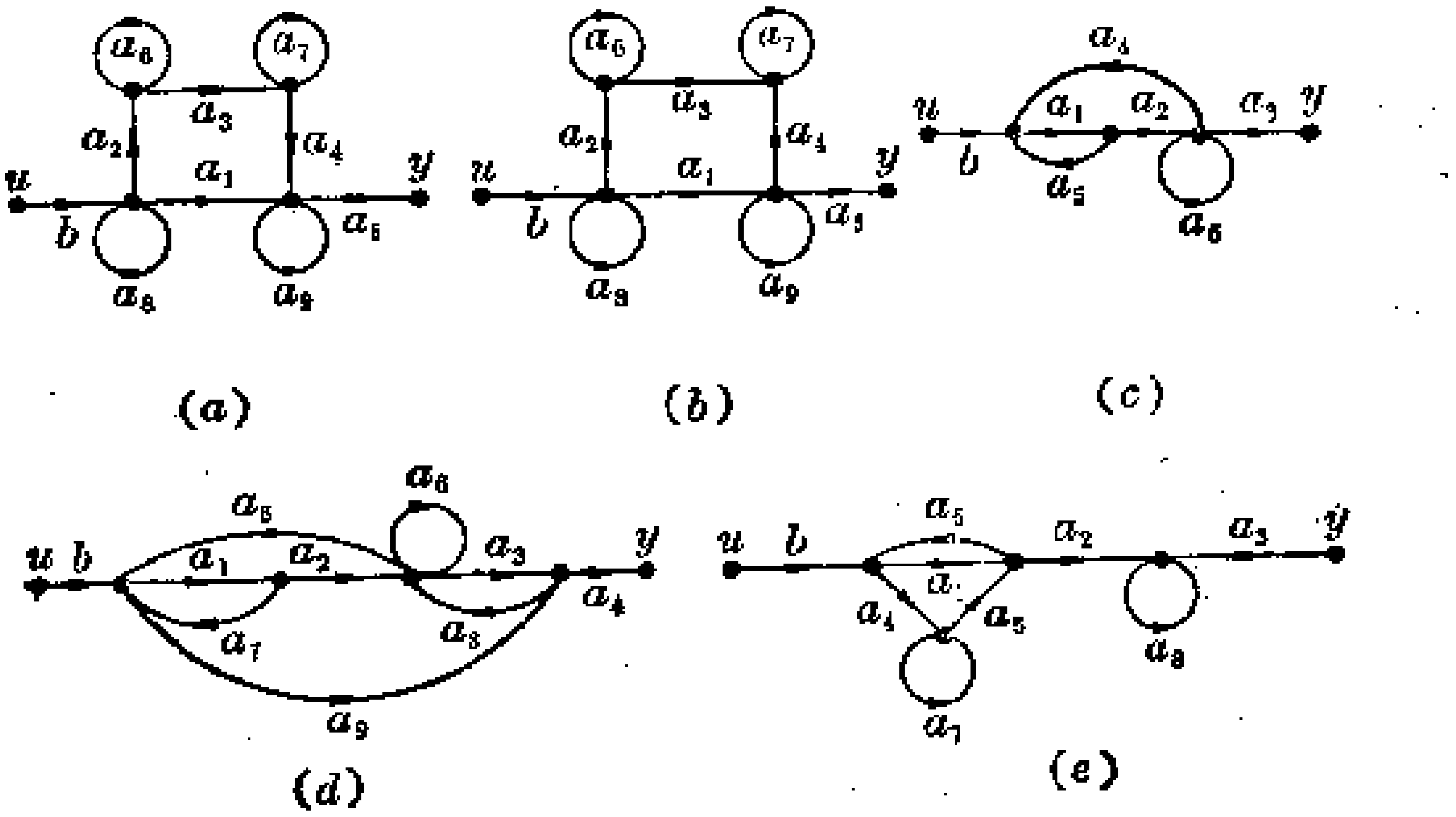


图 PⅡ.2. 习题Ⅱ.2 的流图。

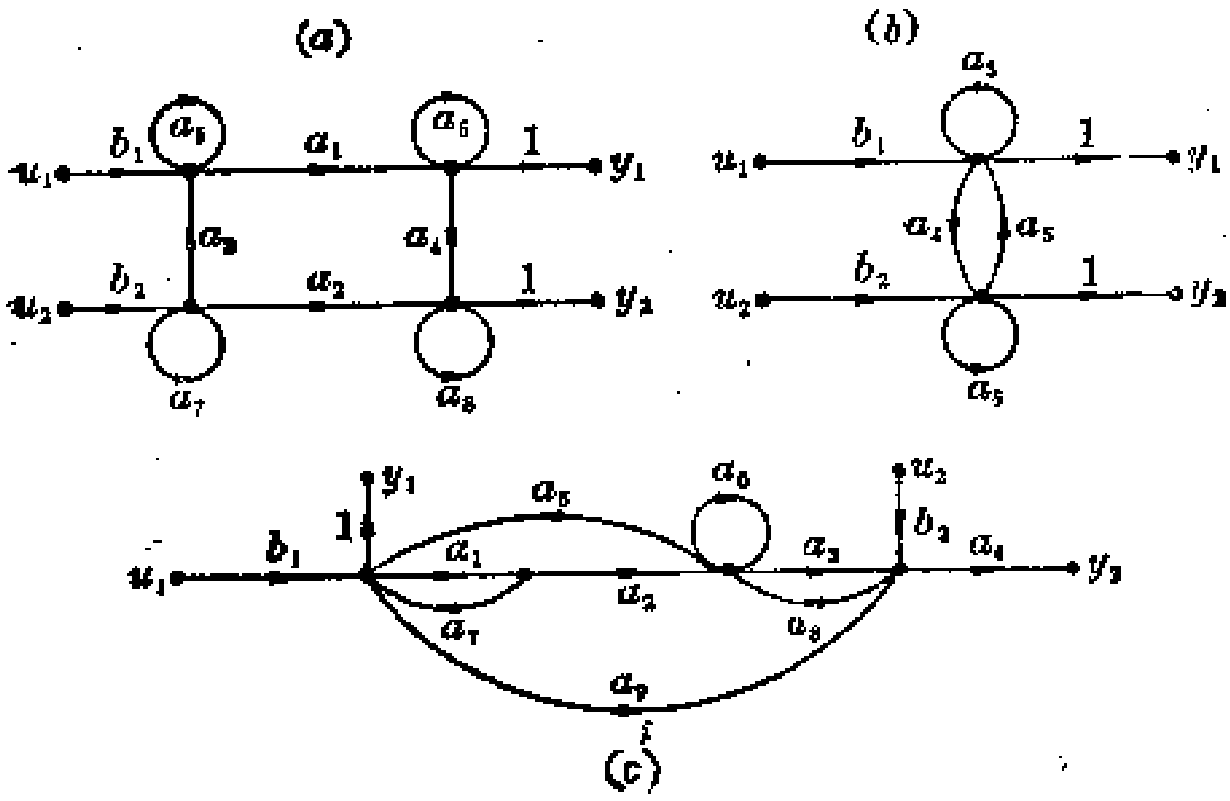


图 PⅡ.3. 习题Ⅱ.3 的流图。

Ⅱ.3. 对图PⅡ.3. 中每一个流图，求y_1与y_2依赖于u_1与u_2的表达式及支路增益。

Ⅱ.4. 用梅逊方法表出图PⅡ.4. 的回路电流依赖于电压E_1与E_2的显式。作出流图。

Ⅱ.5. 用梅逊方法表出图PⅡ.5. 的回路电流依赖于电压E_1与E_2的显式。作出流图。

Ⅱ.6. 用梅逊方法求x,y,z，如果

$$x+y+z=3$$
$$x+2y-z=2$$
$$2x-2y+z=1$$

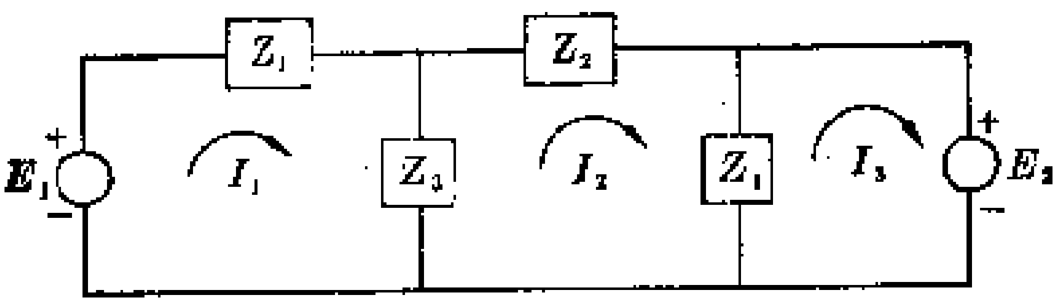


图 PⅡ.4. 习题Ⅱ.4 的电路。

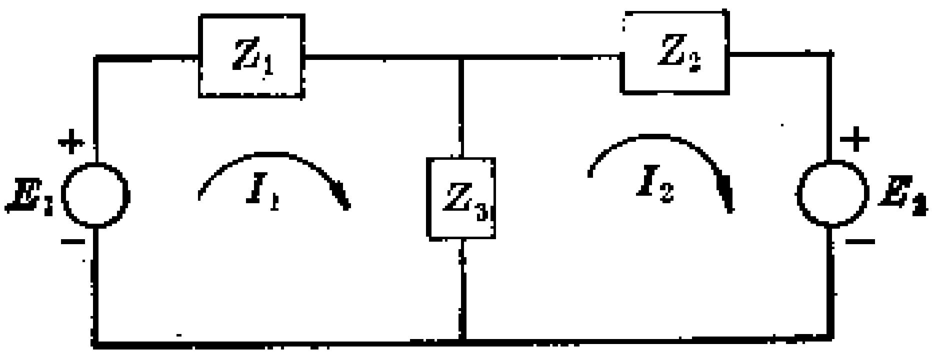


图 PⅡ.5. 习题Ⅱ.5 的电路。

答案：$x=1, y=1, z=1$。

Ⅱ.7. 在刚体动力学的研究中，各种坐标架的旋转有时是需要的。这在信流图的帮助下可以非常系统化的方式来完成。设矢量V在正交坐标架x,y,z中的分量为V_x, V_y, V_z。今要在新的正交坐标架x',y',z'中表示出来。后者是关于x,y,z坐标架的简单的旋转，即关于x轴欧拉旋转α（见图PⅡ.7.）。在新坐标架中矢量的分量是

$$V'_x=V_x$$

$$V'_y=\cos\alpha\, V_y+\sin\alpha V_z$$
$$V'_z=-\sin\alpha V_y+\cos\alpha V_z$$

再作相继的旋转，例如关于 y' 轴再关于 z'' 轴。在每一个这样的坐标架中矢量 V 分别可用分量 V_x'', V_y'', V_z'' 与 V_x''', V_y''', V_z''' 表示出来。作出 α 关于 x 轴，β 关于 y' 轴及 γ 关于 z'' 轴三个旋转的流图。验证

$$V_x'''=\cos\beta\cos\gamma V_x+(\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma)V_y$$
$$+(-\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma)V_z$$
$$V_y'''=-\cos\beta\sin\gamma V_x+(\cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)V_y$$
$$+(\sin\alpha\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma)V_z$$
$$V_z'''=\sin\beta V_x-\sin\alpha\cos\beta V_y+\cos\alpha\cos\beta V_z$$

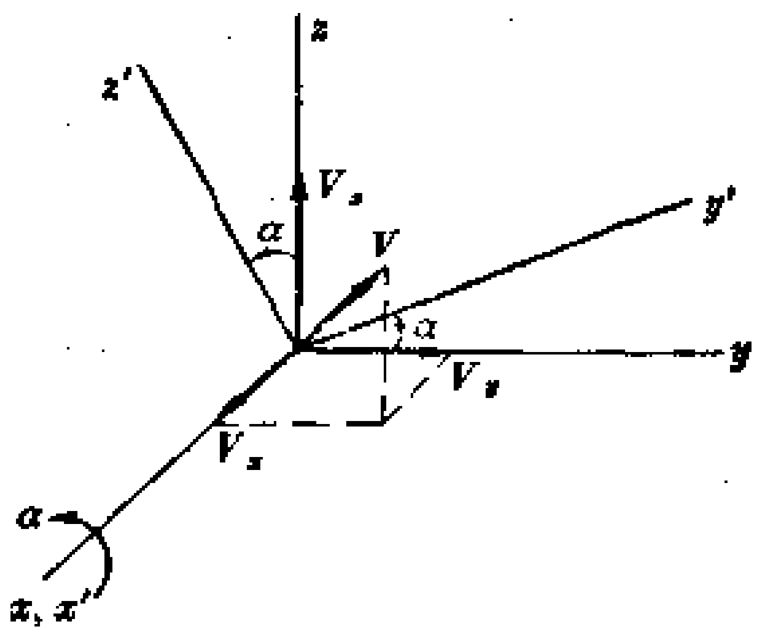


图 PⅡ.7. 关于 x 轴的欧拉旋转。

第六章　平衡点与稳定性

6.1. 引言

1892 年 J. H. 庞加莱发表了《天体力学的新方法》一书，在此书中他提出使数学天文学发生巨大变革的数学概念. 这些概念包括在第五章中出现的 n 维矢量微分方程记号和有关的论述. 他在几何上解释微分方程的解为 n 维空间的轨线. 按照他的想法，我们说一个微分方程就有一个几何学. 在这一章里我们的目标是结合状态空间的运动建立一些直观的概念，特别是定义了运动的平衡点和引入稳定性的概念. 与这些概念相联系的直观思想在相平面即二维状态空间是易于理解的. 所以运动的绝大部分概念都在相平面上说明.

在 §6.4 讨论 n 维空间平衡点的概念. 跟着在下一节简略地研究动态系统用线性系统近似的方法. 系统的线性化应该说是在某个参考点，通常是在平衡点施行. 利用线性近似在平衡点的邻域内分析系统的几何学或运动. 我们发现在一个平衡点的邻域内与另一个平衡点的邻域内运动的差别是相当大的. 也要考察与远离平衡点的运动有关的其它几何想法.

6.2. 状态空间

在 §5.3 简略地介绍了在状态空间中运动的概念. 考察过写为

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \tag{1}$$

的一般矢量微分方程. 定理 5.3-1 保证了方程(1) 有具有分量为

$$x_1=x_1(t),\ x_2=x_2(t),\ \cdots,\ x_n=x_n(t) \tag{2}$$

的唯一解矢量 $\mathbf{x}(t)$. 方程(2)可缩写为明显的矢量解

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(t;\mathbf{x}_0,\mathbf{u}) \tag{3}$$

状态变量 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$是状态矢量 $\mathbf{x}(t)$的坐标. 用标准正交基底 $\mathbf{e}$ 表示,状态矢量可表达如下:

$$\mathbf{x}(t)=x_1(t)\mathbf{e}_1+x_2(t)\mathbf{e}_2+\cdots+x_n(t)\mathbf{e}_n \tag{4}$$

其中

$$\mathbf{e}_i=[0\ 0\ \cdots\ 1\ \cdots\ 0]^T$$

由以前几何学经验的启发,我们可能想要画出运动 $\mathbf{x}(t)$的图形. 抽象地说,这图形可画出如图 6.2-1 所示. $\mathbf{e}$ 基矢量表示坐

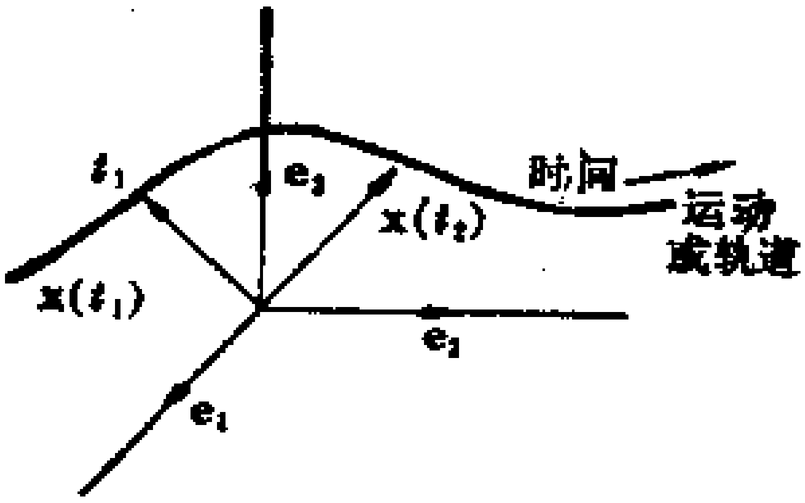


图 6.2-1 状态矢量的相空间表示法

标架,参数 t 表示状态矢量运动的特征. 随着时间的增加状态矢量的尖端生成的点的轨迹称为系统的轨线或运动. 轨线上的每一点对应时间的一个特定点. 在图形上表现三维运动是不方便,但二维运动画起来是很方便的. 因此绝大部分几何概念是在二维空间中建立的. 在二维空间建立的若干几何思想和概念可以从理论上推广到 n 维.

6.3. 相平面上的运动

在这一节里我们研究用方程

$$\ddot{y}+h(y,\dot{y})=0 \tag{1}$$

表示的二阶自治微分系统的几何学. 我们已知，状态矢量可以按各种不同的方法选取. 然而为了方便，也许是按可能的物理解释，状态变量取为 $y=x_1, \dot{y}=x_2$. 因此方程(1)可写为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -h(x_1, x_2) \end{bmatrix} \tag{2}$$

对初态 $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$，假设有用符号表示为

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(t;\mathbf{x}_0)=x_1(t)\mathbf{e}_1+x_2(t)\mathbf{e}_2$$

的唯一解存在(定理 5.3-1).

如果系统是某个物理装置，x_1 可以对应于位置，x_2 对应于速度. 在电路中，若 x_1 对应于电荷，则 x_2 对应于电流. 我们发现状态变量的这种选法有助于画出轨线. 现在作一些基本的观察. 因为 $\dot{x}_1=x_2$，当 $x_2>0$ 时状态变量 x_1 随着时间增大时是增大的；反之，$x_2<0$ 时是减小的，如图 6.3-1a 所示. 再考察写成如下形式的方程(2)：

$$\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1}=\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{-h(x_1, x_2)}{x_2} \tag{3}$$

当 x_2 趋于零时，$\frac{dx_2}{dx_1}$ 变成无界，因此我们断定轨线垂直穿过 $\mathbf{e}_1$ 轴，如图 6.3-1a 所示. 图 6.3-1b 表示一条起始于 $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$ 的典型轨线. 随着时间的增加，状态矢量可以说成是以顺时针方向绕原点"旋转". 在 $t=t_1$ 典型状态矢量表示为 $\mathbf{x}(t_1)$. 下例说明一个物理系统的运动.

例 6.3-1 如图 6.3-2 所示的单摆的线性自由微分方程是

$$\ddot{\theta}+\omega^2\theta=0 \qquad \omega^2=\frac{g}{l}$$

设状态变量定为 $x_1=\theta, x_2=\dot{\theta}$. 运动是用

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega t & \frac{1}{\omega}\sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

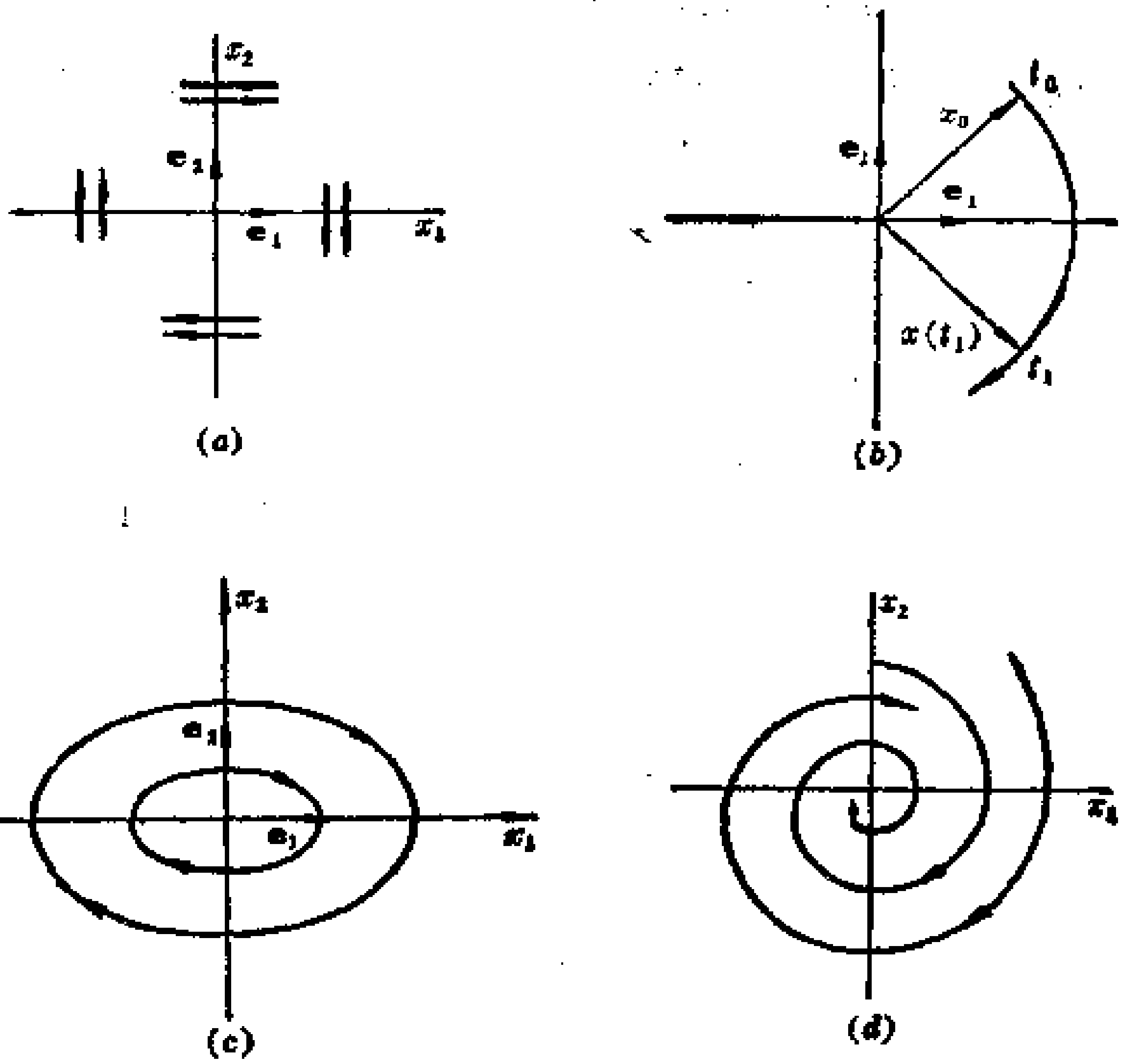


图 6.3-1　一些基本相平面概念

描述的．为了确定此系统的几何学，作平方、数乘、相加等运算于此方程组，消去时间 t，得到

$$\begin{aligned}&\omega^2 x_1^2(t)+x_2^2(t)\\&=\omega^2(\cos^2\omega t+\sin^2\omega t)x_1^2(0)\\&\quad+(\cos^2\omega t+\sin^2\omega t)x_2^2(0)\\&=\omega^2 x_1^2(0)+x_2^2(0)\end{aligned}$$

此方程表示一族椭圆，图 6.3-1c 表示了其中二条椭圆．

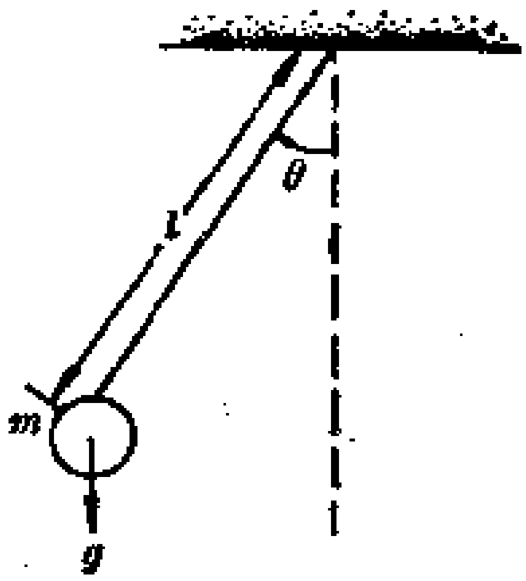


图 6.3-2　单摆

例 6.3-1 的两条不同轨线（椭圆）描画如图 6.3-1c．在许多场合，可能需要画出对应于不同初始条件的一族轨线．通常在某个有兴趣的范围内，画出几条轨线就可断定运动的细节的颇为完

全的概念．轨线族通常称为相图．术语几何学和相图都是通用的．一个典型的相图表示如图 6.3-1d．

定理 5.3-1 确定了相图的一个重要的性质，即两条不同的轨线不能相交．这很容易由反证法证明．假设有两条不同的轨线相交，选择相交的时间为初始时刻 t_0，于是有两条轨线对应于同一个初始条件，这是与定理 5.3-1 矛盾的．

在例 6.3-1，求出的运动方程是参数 t 的函数．消去 t 就得出只包含坐标 x_1 及 x_2 的函数．常常需要在解方程之前消去 t，以 $\dot{x}_1$ 去除 $\dot{x}_2$ 就得到了方程(3)．通常，方程(3)可直接积分，如下例所示．

例 6.3-2　在图 6.3-3a 中非强迫单摆的非线性运动用方程

$$\ddot{\theta}+\omega^2\sin\theta=0$$

描述．如前一样，状态变量取为 $x_1=\theta, x_2=\dot{\theta}$．于是有状态方程

$$\dot{x}_1=x_2$$

$$\dot{x}_2=-\omega^2\sin x_1$$

由方程(3)

$$\frac{dx_2}{dx_1}=-\frac{\omega^2\sin x_1}{x_2}$$

它可直接积分，得到

$$\frac{1}{2}[x_2^2(t)-x_2^2(t_0)]=\omega^2[\cos x_1(t)-\cos x_1(t_0)]$$

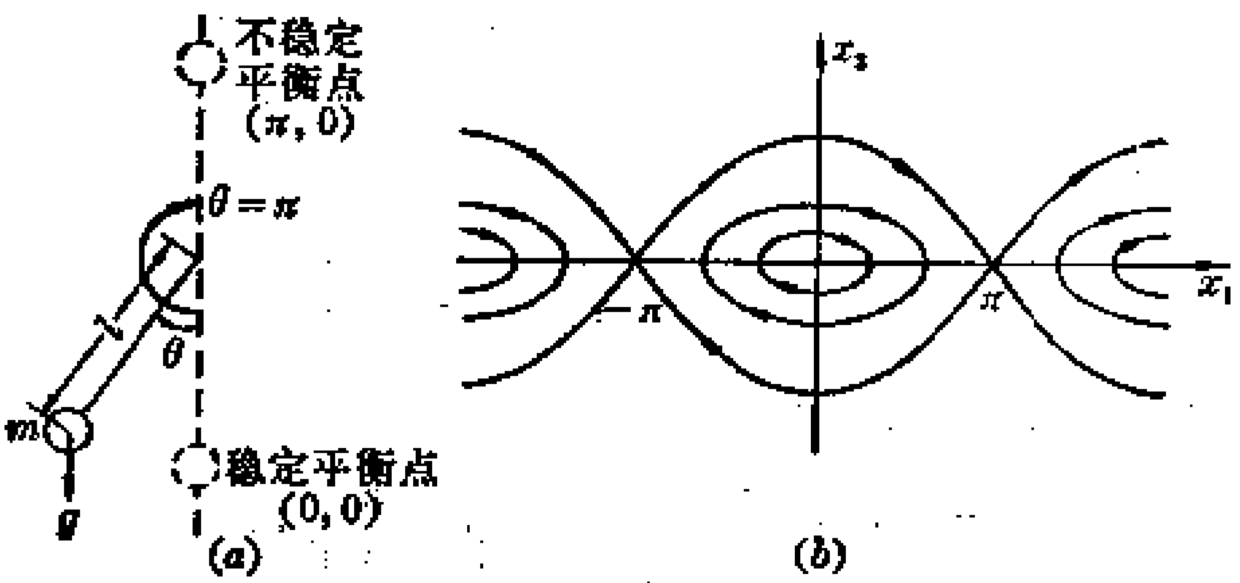


图 6.3-3　单摆的相图

画出对应的相图如图 6.3-3b.

通常表示如方程(3) 的二阶非线性微分方程是不能分离变量的[Wylie, 1966], 因此不能直接积分. 在这种情况作轨线的图解法(通称为等倾线法)是适用的[Truxal, 1955].

6.4. 平衡点

对图 6.3-3b 的轨线的考察中，我们看到在相平面上的点 $(-\pi, 0)$ 与 $(\pi, 0)$ 处运动是静止的. 在 §4.3 中我们曾定义在状态空间中这样的状态或点是平衡状态或平衡点. 平衡点也称为临界点、奇异点或零点.

在这一节里我们结合 n 维自治微分系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{1}$$

研究平衡点. 方程 (1) 的运动对一切 t 当 $\dot{\mathbf{x}} = 0$ 时是静止的. 这就引出下面的定义.

定义 6.4-1 对一切 t 满足条件

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_e) = \mathbf{0} \tag{2}$$

的一切点是方程(1)中自治系统的平衡点.

如在第四章，我们用 $\mathbf{x}_e$ 表示平衡状态. 注意到 $\mathbf{x}_e$ 是方程(1)的平凡解，亦即是 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ 的解.

方程(1)的系统可以有一个或多个平衡点. 如下例所说明的，在例 6.3-2 中的单摆有无穷多个平衡点.

例 6.4-1 例 6.3-2 的单摆的平衡点可由方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\omega^2 \sin x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

求出. 显然有无穷多个平衡状态:

$$\mathbf{x}_e = \cdots; \begin{bmatrix} -\pi \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}; \cdots$$

在一个平衡点的小邻域内的运动与另一平衡点小邻域内的运

动可能有很大的差别．例如，观察在图 6.3-3b 中所示的点(0,0)与$(\pi,0)$在运动上的差别．相图的许多特征可由这些微小运动来决定．由定理 5.3-1 容易看出没有轨线可以穿过平衡点，因为这些点本身就是一条轨线；亦即 $\mathbf{x}=\mathbf{x}_e$ 是方程(1)的一个解．这个轨线在 $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_e$ 时出现．一条轨线当时间无限增大时可以接近于平衡点，但轨线永远不能穿过平衡点．这些讨论引出下面的定义．

定义 6.4-2 一条轨线 $\mathbf{x}(t)$ 称为当 $t\to\pm\infty$ 趋于平衡点 $\mathbf{x}_e$，如果

$$\lim_{t\to\pm\infty}\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}_e\|=0 \tag{3}$$

定义 6.4-3 一条轨线 $\mathbf{x}(t)$ 称为当 $t\to\pm\infty$ 注入平衡点，如果除(3)式外，对 $i=1,2,\cdots,n$ 下列极限存在：

$$\lim_{t\to\pm\infty}\frac{x_i(t)-x_{ie}}{\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}_e\|} \tag{4}$$

图 6.4-1 说明这两个定义．箭头表示时间增加时运动的方向．若把 t 换为 $-t$，箭头就反向，并且在图 6.4-1b 中显示出离开平衡点的两条轨线将注入平衡点．在相空间中有轨线 $\mathbf{x}(t)$ 通过的一切点可归类为正则点，作为奇异点或平衡点的对立面．

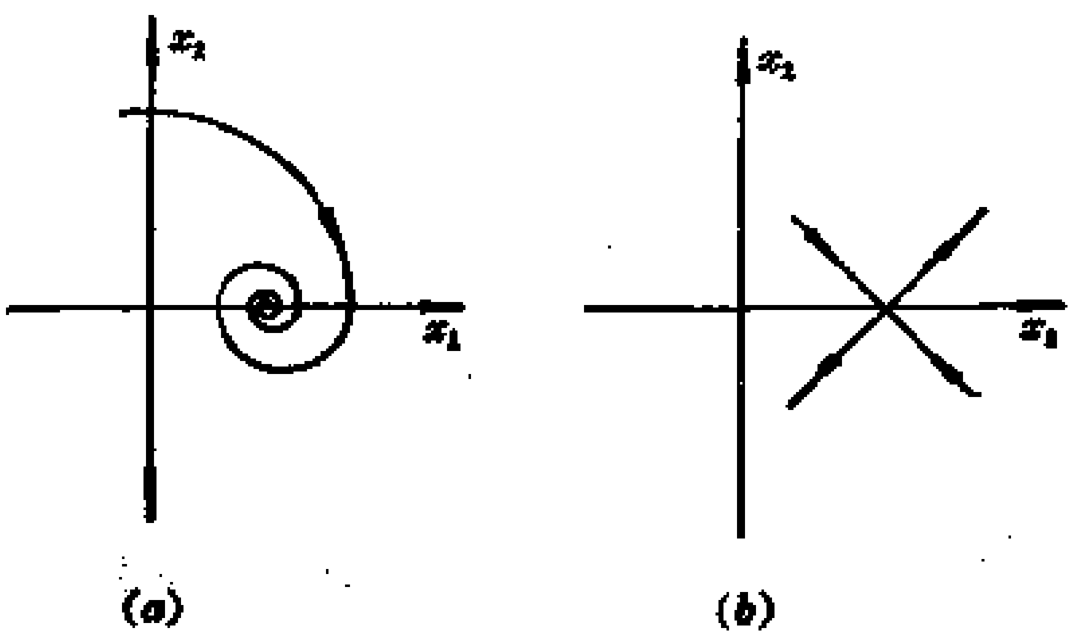


图 6.4-1 轨线的例子(a) 趋于平衡点(b) 注入平衡点

定义 6.4-4 若在平衡点 $\mathbf{x}_e$ 的微小邻域内只包含正则点，则 $\mathbf{x}_e$ 归类为孤立平衡点.

在实际中遇到的多数系统只含孤立平衡点，但有某些重要的情况恰不是这样. 考察系统 $\ddot{y}=0$，它可表示为标准形式 $\dot{x}=\mathbf{A}x$，其中 $x_1=y$, $x_2=\dot{y}$, 且

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

平衡点是 $x_1=c$(任意常数) 及 $x_2=0$. 所以整个 x_1 轴的所有点都是平衡点. 因此这个系统的所有平衡点都不是孤立的. 线性自治系统的平衡点当且只当 $\det\mathbf{A}\neq 0$ 时是孤立的.

定义 6.4-5 方程(1)的平衡点 $\mathbf{x}_e$ 是简单点，如果相应的雅可比行列式不为零，即

$$\det\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}\neq 0 \tag{5}$$

否则，就是非简单点.

一般，若平衡点是简单点，它也是孤立点，但反过来除了线性自治系统外不是普遍成立的.

在例 6.4-1 中有许多平衡点，一个在原点，其余的在别处. 一般，最好是平移坐标轴使有兴趣的平衡点在原点. 平移由变量变换

$$\mathbf{z}=\mathbf{x}-\mathbf{x}_e \qquad \dot{\mathbf{z}}=\dot{\mathbf{x}} \tag{6}$$

就能容易地实现. 于是方程(1)可简单地写为

$$\dot{\mathbf{z}}=\mathbf{f}(\mathbf{z}+\mathbf{x}_e) \tag{7}$$

且一个平凡解为 $\mathbf{z}=\mathbf{0}$. 运动 $\mathbf{z}(t)$ 定义为干扰运动或扰动运动. 方程(7) 及下列例子说明，不失一般性，我们只需要考虑在原点的平衡点.

例 6.4-2 考察线性系统

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b} \quad \mathbf{b}=\text{常矢量}$$

只要 $\mathbf{A}^{-1}$ 存在，亦即 $\mathbf{x}_e$ 是一个孤立平衡点，平衡点可在

$$\mathbf{x}_e=-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

求出．如果我们定义 $\mathbf{z}=\mathbf{x}-\mathbf{x}_e$ 且代入运动方程，则有

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}&=\mathbf{A}(\mathbf{z}-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b})+\mathbf{b}\\&=\mathbf{A}\mathbf{z}\end{aligned}$$

此式表示平衡点在原点的自由系统．最后我们注意到线性自治系统只要$\mathbf{A}^{-1}$存在在一般情况仅有一个平衡点．

6.5. 线性化

在§6.6我们将定义并讨论稳定性．“稳定性”一词的意思几乎是自明的．一个系统在某种条件下或在某个平衡点运行．稳定性的内容是处理系统在平衡点有轻微的移动或扰动后的运动．如果扰动对系统只有微小的影响，我们一般说系统是稳定的．如果扰动有相当大的影响，我们一般说系统是不稳定的．

在稳定性的研究中，常常可以在原点的邻近把函数 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$表示为

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{r}(\mathbf{x}, t) \tag{1}$$

矢量 $\mathbf{r}(\mathbf{x}, t)$称为非线性剩余矢量．在许多场合，需要在原点的微小邻域内考察系统的运动．为此我们近似表示方程(1) 的系统为线性系统

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)=\mathbf{A}\mathbf{x} \tag{2}$$

这里我们假设当$\|\mathbf{x}\|$很小时，$\|\mathbf{r}\|$相对于$\|\mathbf{x}\|$ 也是小的．为了简化研究，假设$\dfrac{\|\mathbf{r}(\mathbf{x}, t)\|}{\|\mathbf{x}\|}$当 $t\geqslant 0$ 时趋于零．

方程(2)是方程(1)的线性近似式．本节的目的是简略地讨论线性化微分系统的技巧．

首先在一个平衡点的微小邻域内考察自治系统

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{3}$$

如前一样，方程(3)的平凡解，即

$$\mathbf{f}(\mathbf{x})=0$$

给出至少一个简单平衡点 $\mathbf{x}_e$. 选择一个有兴趣的平衡点并把它作为参考点. 函数 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在正则条件下，可以对参考点把 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 展为泰勒级数，亦即关于 $\mathbf{x}_e$ 展开方程(3)为

$$\dot{\mathbf{x}}=\dot{\mathbf{x}}_e+\left.\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_e}\Delta\mathbf{x}+\cdots \tag{4}$$

其中

$$\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}=\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]$$

$$\Delta\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1-x_{1e}\\x_2-x_{2e}\\\vdots\\x_n-x_{ne}\end{bmatrix}$$

如已指出的，偏导数是在平衡点或参考点计算的. 线性近似是在展开式中只保留第一项而得到的. 运动的近似微分方程用 $n\times n$ 雅可比矩阵写为

$$\dot{\mathbf{x}}-\dot{\mathbf{x}}_e=\Delta\dot{\mathbf{x}}\doteq\left.\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_e}\Delta\mathbf{x} \tag{5}$$

这个线性微分方程被认为是描述微小干扰或微小扰动或简称微小运动，$\Delta\mathbf{x}(t)$在 $\mathbf{x}_e$ 的邻域内.

例 6.5-1 系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\x_3\\x_1^3-x_1-x_2-x_3\end{bmatrix}$$

在平衡点 $\mathbf{x}_e=[-1\quad 0\quad 0]^T$ 邻域内的线性运动是

$$\begin{bmatrix}\Delta\dot{x}_1\\\Delta\dot{x}_2\\\Delta\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\(3x_1^2-1)|_{x_1=-1}&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x_1\\\Delta x_2\\\Delta x_3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\2 & -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x_1\\\Delta x_2\\\Delta x_3\end{bmatrix}$$

线性化技巧也可扩展到非自治系统．参考点的概念不像在自治系统情况那样明显．对于自由时变系统

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \tag{6}$$

平衡点可定义为对一切 t 满足方程

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_e, t)\triangleq 0 \tag{7}$$

的解．在这种情况，平衡状态 $\mathbf{x}_e$ 通常是依赖于时间的，因此称为动平衡点．若把 $\mathbf{x}_e$ 取作参考点，按照(5)式仍可作出方程(6)的线性化．其结果是一个时变线性微分方程，如下例所示．

例 6.5-2 考察系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\(x_1^2-x_1-x_2)t\end{bmatrix}$$

求出两个平衡点为

$$\mathbf{x}_e=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

在这个情况它们是与时间无关的．在平衡点(1, 0)，方程(5)给出时变系统

$$\begin{bmatrix}\Delta\dot{x}_1\\\Delta\dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\t & -t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x_1\\\Delta x_2\end{bmatrix} \tag{8}$$

参考轨线附近的微小运动

现在考虑系统

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \tag{9}$$

这个系统的微小运动是取决于一条参考轨线而不是一点，假设方程(9)满足李卜希斯条件，使唯一解存在［对应于参考强迫函数 $\mathbf{u}_r(t)$ 及初始条件 $\mathbf{x}_0$］．参考解或参考轨线记为

$$\mathbf{x}_r(t)=\mathbf{x}_r(t;\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_r) \tag{10}$$

一旦参考轨线确定了，就可对方程(9)作线性化．方程(9)的截尾泰勒级数成为

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} \doteq \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\bigg|_{\mathbf{x}_r,\mathbf{u}_r}\Delta\mathbf{x}+\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\bigg|_{\mathbf{x}_r,\mathbf{u}_r}\Delta\mathbf{u} \tag{11}$$

两个雅可比矩阵一般说来都是时间的函数．如果我们记矩阵为

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\bigg|_{\mathbf{x}_r,\mathbf{u}_r}=\mathbf{A}(t) \quad 及 \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\bigg|_{\mathbf{x}_r,\mathbf{u}_r}=\mathbf{B}(t) \tag{12}$$

则得方程(9)的线性近似式

$$\Delta\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}(t)\Delta\mathbf{x}+\mathbf{B}(t)\Delta\mathbf{u} \tag{13}$$

解矢量 $\Delta\mathbf{x}(t)$ 表示方程(9)关于参考轨线 $\mathbf{x}_r$ 的微小干扰运动或扰动运动．这时微小干扰是 $\Delta\mathbf{u}$ 和 $\Delta\mathbf{x}_0$．这些想法在图 6.5-1 中说明之．

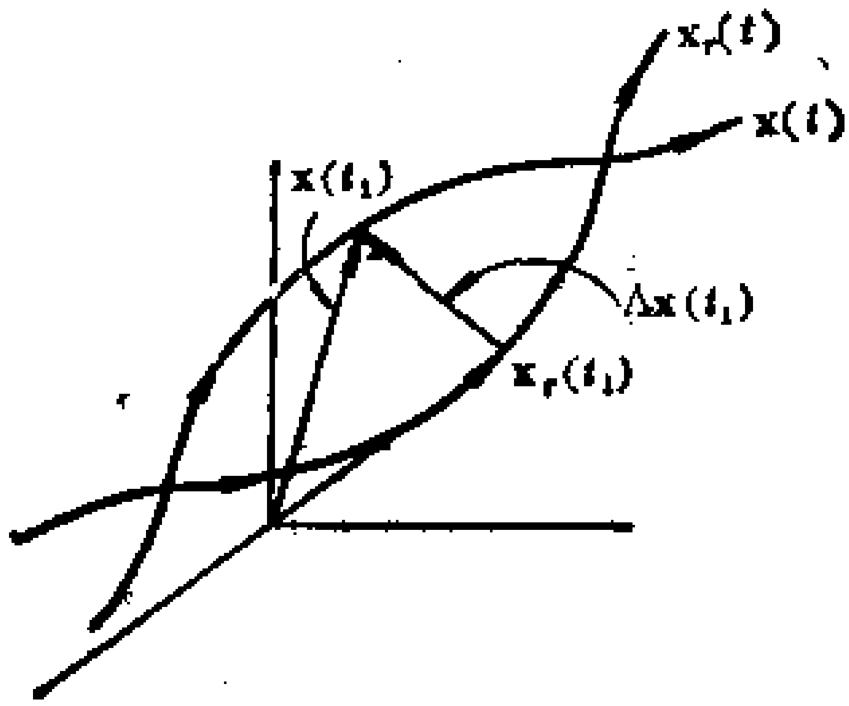


图 6.5-1　n 维空间微小干扰运动的说明

6.6. 稳定性；李雅普诺夫第一方法

第七章是稳定性的一般讨论．在那里讨论的一般方法是通常所说的李雅普诺夫第二方法或直接方法．这一节里所介绍的可以称为李雅普诺夫第一方法．它通常适用于线性系统或非线性系统靠近平衡点的微小运动．对于定常系统，第一方法涉及到系统描述矩阵的特征值的研究．

为了表达上的连贯性，首先考察自由系统

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x},t) \tag{1}$$

关于参考轨线 $\mathbf{x}_r$ 的扰动方程可由前面提到的用展开方程(1)成泰勒级数得出为

$$\dot{\mathbf{x}}-\dot{\mathbf{x}}_r=\left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_r}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_r)+\mathbf{r}(\mathbf{x},t) \tag{2}$$

矢量 $\mathbf{r}(\mathbf{x},t)$ 表示所有的高次项，且如前所述称为非线性剩余. 如果扰动充分小，即对于 $t>0$，$\frac{\|\mathbf{r}(\mathbf{x},t)\|}{\|\mathbf{x}\|}$趋于零，则方程(2)化为线性方程

$$\Delta\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}(t)\Delta\mathbf{x} \tag{3}$$

其中 $\mathbf{A}(t)=\left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_r}$. 去掉Δ记号，我们研究用

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}(t)\mathbf{x} \tag{4}$$

表示的线性系统的稳定性. 首先考察 **A** 是常数矩阵的情况.

定常系统

确定定常线性系统稳定性的显式判据是容易导出的. 读者或许熟悉关于系统在复平面上极点位置的稳定性判据. 我们研究线性系统的稳定性先从推导系统描述矩阵特征值位置的判据开始，然后把特征值判据与复 s 平面判据联系起来. 为了确定起见，我们从零输入(自由)系统

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x} \tag{5}$$

开始并研究位于原点的平衡点 $\mathbf{x}_e=\mathbf{0}$ 邻近的运动. 我们说系统的零态 $\mathbf{x}(t)=\mathbf{0}$ 是稳定的，如果对于任意小的初态$\mathbf{x}_0$，自由系统的运动停留在 **0** 的近傍. 其次，如果系统是零态稳定的(零输入稳定)且 **x** 随时间增大而趋于原点，则说系统是渐近稳定的. 我们的工作是从略为直观的稳定性定义对定常线性系统建立一些定理. 这些直观的思想稍后将归结在定义 6.6-1 中.

为了建立稳定性判据，我们以考察矩阵 **A** 的特征值来研究系统的运动. 设想 **A** 是简单结构的，则存在一个矩阵 **T** 使得

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}=\mathrm{diag}[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n] \tag{6}$$

所以变量变换

$$\mathbf{x}=\mathbf{T}\mathbf{z} \tag{7}$$

化方程(5)为

$$\dot{\mathbf{z}}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{z} \qquad \mathbf{z}_0=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0 \tag{8}$$

利用方程(5.6-10)和(5.6-11)的结果，有

$$\mathbf{z}(t)=\mathrm{diag}[e^{\lambda_1 t},e^{\lambda_2 t},\cdots,e^{\lambda_n t}]\mathbf{z}_0 \tag{9}$$

由表达式(9)可推出下列定理.

定理 6.6-1 若方程(5)表示简单系统，即 A 是简单的，系统是稳定的(零输入稳定)当且仅当对所有 i，$\mathrm{Re}\lambda_i\leqslant 0$. 它是渐近稳定的，当且仅当对所有 i，$\mathrm{Re}\lambda_i<0$.

此定理的证明可由观察表达式 (9) 立即得到. 注意到若 $\mathrm{Re}\lambda_i<0$，则 $\mathbf{z}(t)$ 随时间增大而趋于零，又由关系式(7)，$\mathbf{x}(t)$ 也趋于零 (参看例 5.6-2). 若有两个或多个特征值是纯虚数，系统是稳定的而不是渐近稳定的，如下例所示.

例 6.6-1 一简单系统由矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\theta\\ 0 & \theta & 0\end{bmatrix}$$

描述，此矩阵有特征值 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=-i\theta$，$\lambda_3=i\theta$，如在例 5.6-3 中所求出的. 系统的运动是

$$\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0$$

转移矩阵 $e^{\mathbf{A}t}$ 已在例 5.6-3 中用封闭形式给出，且指出运动是振动的. 当 $\mathbf{x}_0$ 靠近于原点时此自由运动也靠近于原点. 此运动不随时间增大而趋于零. 研究例 6.3-1 中摆的稳定性留给读者.

如果方程(5)是方程(1)的线性近似，特别要注意当任一 $\mathrm{Re}\lambda_i=0$ 的情况. 这时非线性剩余 $\mathbf{r}(\mathbf{x},t)$ 影响稳定性. 为了说明这个可能性，定理 6.6-1 可修改如下.

定理 6.6-2 如果常数矩阵 $\mathbf{A}$ 的一切特征值都有负实部，且

$\frac{\|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|}$对 $t\geqslant 0$ 趋于零，则系统

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{r}(\mathbf{x})$$

在原点是渐近稳定的。若 $\mathbf{A}$ 有纯虚特征值，稳定性依赖于 $\mathbf{r}(\mathbf{x})$。

下例说明定理 6.2-2 的想法。

例 6.6-2 考察非线性系统

$$\ddot{y}-\dot{y}^3+y=0$$

在点 $y=\dot{y}=0$ 的微小运动可用线性系统

$$\Delta\ddot{y}-3\dot{y}^2\Delta\dot{y}+\Delta y=\Delta\ddot{y}+\Delta y=0$$

来描述。此系统的特征值是虚数，并且正料想运动是稳定的。但这时 $\Delta\dot{y}$ 的系数令其为零是重要的。显然，对任何 $\dot{y}\geqslant\delta>0$，尽管 δ 很小，运动是不稳定的，因为特征值有正实部。

为了把定理 6.6-1 一般化，我们应用系统矩阵的约当标准形。我们正式给出下列定理。

定理 6.6-3 方程(5)的定常系统是零输入稳定的，当且只当

(i) 所有特征值有非正实部($\mathrm{Re}\lambda_k\leqslant 0$)。

(ii) 对应于虚特征值的约当块的阶数为 1。

此系统是渐近稳定的，当且只当所有特征值有负实部($\mathrm{Re}\lambda_k<0$)。

设 $\mathbf{P}$ 是非奇矩阵使变量变换

$$\mathbf{x}=\mathbf{P}\mathbf{z} \tag{10}$$

化方程(5)为

$$\dot{\mathbf{z}}=\mathbf{J}\mathbf{z} \qquad \mathbf{z}_0=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_0 \tag{11}$$

其中

$$\mathbf{J}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} \tag{12}$$

我们知道 $\mathbf{J}$ 是拟三角形矩阵，即

$$\mathbf{J}=\mathrm{diag}[\mathbf{J}_1,\mathbf{J}_2,\cdots,\mathbf{J}_\alpha] \tag{13}$$

其中 α 是约当块的个数[参看表达式(4.7-90)]。方程(11)的运动是

$$z(t)=\mathrm{diag}[e^{J_1 t}, e^{J_2 t}, \cdots, e^{J_\alpha t}]z_0 \tag{14}$$

今根据例 5.6-1 的结果，有

$$e^{J_k t}=e^{\lambda_k t}F(t) \qquad k=1,2,\cdots,\alpha \tag{15}$$

其中 $F(t)$ 是 $r_k\times r_k$ 矩阵，r_k 是第 k 个约当块的阶数.

若定理中条件(i)及(ii)成立，则(15)式中的矩阵或者趋于零(对 $\mathrm{Re}\lambda_k<0$)或者化为标量方程

$$e^{J_k t}=e^{i\omega_k t} \qquad 对\ \mathrm{Re}\lambda_k=0\ 和\ \mathrm{Im}\lambda_k=\omega_k$$

由此断定当条件(i)和(ii)成立时系统是稳定的. 现在假设系统是稳定的，要证明条件(i)和(ii)成立. 利用反证法. 设 $\mathrm{Re}\lambda_k>0$，于是

$$e^{J_k t}=e^{\lambda_k t}F(t) \tag{16}$$

是无限增大的，可断定此系统是不稳定的. 进而设有重虚根($\mathrm{Re}\lambda_k=0$)，于是

$$e^{J_k t}=e^{i\omega_k t}F(t) \tag{17}$$

无限增大，我们再次断定系统是不稳定的. 由这两个矛盾，从稳定性的定义我们断定条件(i)和(ii)成立. 为了证明定理的最后部分，我们注意到若 $\mathrm{Re}\lambda_k<0$ 则在(15)式中所有矩阵都趋于零. 再设系统是渐近稳定的，但对某些 k，$\omega_k\neq0$. 若 $\mathrm{Re}\lambda_k=0$ 且 $\omega_k\neq0$ 则

$$e^{J_k t}=e^{i\omega_k t} \tag{18}$$

此运动不趋于零，此与渐近稳定的假设矛盾. 再若 $\mathrm{Re}\lambda_k>0$ 则

$$e^{J_k t}=e^{\lambda_k t}F(t)$$

它是无限增大的，又产生矛盾.

为了把上面的定理和用拉普拉斯变换与复 s 平面表述的稳定性相联系，我们可从方程(11)的拉氏变换式开始.

$$z(s)=(sI-J)^{-1}z_0 \tag{19}$$

由于 $sI-J$ 是拟对角形的，可写为

$$(sI-J)^{-1}=\mathrm{diag}[(sI_1-J_1)^{-1}, \cdots, (sI_\alpha-J_\alpha)^{-1}] \tag{20}$$

我们能够证明

$$(s\mathbf{I}_k-\mathbf{J}_k)^{-1}=\mathbf{F}(s-\lambda_k)$$

其中 $\mathbf{F}(s-\lambda_k)$ 是 $\mathbf{F}$ 的拉氏变换式中以 $s-\lambda_k$ 代 s, 即

$$\mathbf{F}(s-\lambda_k)=\mathbf{F}(s)\big|_{s\to s-\lambda_k}$$

例如, 例 5.6-1 的矩阵成为

$$\mathbf{F}(s-\lambda_k)=\begin{bmatrix} \frac{1}{s-\lambda_k} & \frac{1}{(s-\lambda_k)^2} & \cdots & \frac{1}{(s-\lambda_k)^n} \\ 0 & \frac{1}{s-\lambda_k} & \cdots & \frac{1}{(s-\lambda_k)^{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{s-\lambda_k} \end{bmatrix} \tag{21}$$

更直接地, 我们看出(21)正好就是(15)的拉氏变换式. 利用(21), 我们根据复 s 平面来重述定理 6.6-3, 得到下列定理.

定理 6.6-4 方程(5)的定常系统是零输入稳定的, 当且仅当

(i) 在复 s 平面的右半平面上没有极点.

(ii) 所有在虚轴上的极点都是单极点.

系统是渐近稳定的, 当且仅当所有极点在左半平面上.

时变系统

现在考察时变系统零态稳定性. 如上所述, 我们说零态 $\mathbf{x}(t)=\mathbf{0}$ 是稳定的(或系统是零输入稳定的), 是指如果系统的自由运动对任何充分靠近原点的 x_0 仍靠近原点. 稳定性的一个正式定义可列出如下.

定义 6.6-1 自由系统

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}(t)\mathbf{x} \tag{22}$$

是: (i) 零输入稳定的, 如果对任何 t_0 及任何 $\epsilon>0$, 存在一个 $\delta(t_0,\epsilon)=\delta>0$, 以致当

$$\|\mathbf{x}_0\|<\delta \tag{23}$$

对于 $t>t_0$ 有

$$\|\mathbf{x}(t)\|<\epsilon \tag{24}$$

(ii) 一致稳定的，如果 δ 与 t_0 无关。

(iii) 渐近稳定的，如果对任何 t_0 和充分小的 $\mathbf{x}_0$ 当 $t\to\infty$ 时 $\mathbf{x}(t)\to 0$。

现在给出一个适用于自由时变系统稳定性的定理。我们将要看到为了决定系统是否一致渐近稳定，必须对所有 t 及 t_0 计算转移矩阵。

定理 6.6-5 方程(22)的系统是

(i) 稳定的，当且仅当

$$\|\boldsymbol{\Phi}(t, t_0)\|\leqslant c(t_0) \qquad t>t_0 \tag{25}$$

其中 c 是常数，它可能依赖于 t_0。

(ii) 渐近稳定的，当且仅当(25)成立并且当 $t\to\infty$时

$$\|\boldsymbol{\Phi}(t, t_0)\|\to 0 \tag{26}$$

为了证明定理 6.6-5，我们考察自由运动

$$\mathbf{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t, t_0)\mathbf{x}_0 \tag{27}$$

由范数的性质

$$\|\mathbf{x}(t)\|\leqslant\|\boldsymbol{\Phi}(t, t_0)\|\|\mathbf{x}_0\| \tag{28}$$

现在设(25)成立，则

$$\|\mathbf{x}(t)\|\leqslant c\|\mathbf{x}_0\| \tag{29}$$

进而取$\|\mathbf{x}_0\|$使得

$$\|\mathbf{x}_0\|\leqslant\delta(\epsilon)=\frac{\epsilon}{c} \tag{30}$$

于是把(30)代入(29)式，得到

$$\|\mathbf{x}(t)\|<\epsilon$$

这正是(24)所要求的。

为了证明(25)是必要的，假设系统是稳定的而‖Φ‖却是无界的，于是推出矛盾. 若‖Φ‖是无界的，则至少有一个元素是无界的. 例如设 $\phi_{12}(t)$ 是无界的，则当 $\mathbf{x}_0=[0\ 1\ 0\ \cdots\ 0]^T$，状态变量

$$x_1(t)=\phi_{12}(t)$$

是无界的，且 ‖x‖ 也是无界的；于是我们得到矛盾. 对定理的第(ii)部分可作同样的论证. 例如若 $\phi_{12}(t)$ 不趋于零，则显然 $x_1(t)$ 不趋于零，并且系统是渐近稳定的当且仅当(26)成立.

定理 6.6-5 与定理 6.6-1 和 6.6-3 是一致的. 以下例说明之.

例 6.6-3 考察例 6.6-1 中的系统. 转移矩阵是

$$e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta t & -\sin\theta t\\ 0 & \sin\theta t & \cos\theta t\end{bmatrix}$$

假若利用欧几里得范数，则

$$\|e^{\mathbf{A}t}\|^2=\text{trace}(e^{\mathbf{A}t})(e^{\mathbf{A}t})^T \tag{31}$$

注意到 $e^{\mathbf{A}t}$ 是正交的，立即得到

$$\|e^{\mathbf{A}t}\|=\sqrt{3} \tag{32}$$

此系统是稳定的，但不是渐近稳定的. 转移矩阵的范数是有界的，但不随时间趋于零.

输入输出稳定性

现在引入在线性系统中经常使用的另一概念. 考察系统

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}+\mathbf{B}(t)\mathbf{u} \tag{33}$$

其中 $\mathbf{A}(t)$ 与 $\mathbf{B}(t)$ 的元素是时间的有界函数. 设 $\mathbf{u}(t)$ 是有界输入，于是我们说方程(33)的系统是稳定的，如果 $\mathbf{u}(t)$ 导致有界输出，也即有界输入产生有界输出. 我们将此概念用下列定义表出.

定义 6.6-2 方程 (33) 的系统是稳定的（有界输入，有界输出），如果每个有界输入在全体状态变量中产生有界变化.

用记号表示，定义 6.6-2 表明系统是稳定的，如果对一切

$$\|\mathbf{u}(t)\|<M \qquad t>t_0$$

对应有一个常数 k 使得

$$\|\mathbf{x}(t)\|<k \qquad t>t_0$$

我们不去追求这个稳定性概念的细节. 有兴趣的读者可参考关于这个问题较广泛讨论的文献. 我们用一个统一的定理来概括关于线性系统稳定性的讨论. 但不企图去证明这些结论.

定理 6.6-6 对方程(33)的系统，设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 是有界的，即

(i) $\|\mathbf{A}(t)\|\leqslant c_1$ 对一切 t

(ii) $0<c_2<\|\mathbf{B}(t)\mathbf{u}\|\leqslant c_3$ 对 $\|\mathbf{u}\|=1$

则下列论断是等价的.

1. 任何一致有界输入

$$\|\mathbf{u}(t)\|\leqslant c_4$$

导致有界输出

$$\|\mathbf{x}(t)\|<c_5<\infty$$

2. 对一切 $t>t_0$,

$$\int_{t_0}^{t}\|\mathbf{\Phi}(t,\lambda)\|d\lambda<\infty$$

3. 自由系统的零态 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 是一致渐近稳定的.

4. 存在正常数 c_6 及 c_7 使当 $t\geqslant t_0$ 时有

$$\|\mathbf{\Phi}\|\leqslant c_6e^{c_7(t-t_0)}$$

6.7. 相平面上平衡点的分类

在 n 维空间我们已经把简单平衡点分为稳定的与不稳定的两类. 在二维空间另有传统的分类方法. 现在引入这些想法. 再一次考察二阶自治系统

$$\ddot{y}+h(y,\dot{y})=0 \tag{1}$$

研究的目标在于平衡点邻近的微小运动的特征. 如在 §6.3 一样，把状态变量取作 $x_1=y$ 及 $x_2=\dot{y}$，于是方程(1)写作

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\ -h(x_1,x_2)\end{bmatrix} \tag{2}$$

平衡点满足关系式

$$x_2=0 \qquad h(x_1,0)=0 \tag{3}$$

微小运动由线性系统

$$\begin{bmatrix}\Delta\dot{x}_1\\ \Delta\dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\left.\dfrac{\partial h}{\partial x_1}\right|_{x_e} & -\left.\dfrac{\partial h}{\partial x_2}\right|_{x_e}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\end{bmatrix} \tag{4}$$

描述，这里 $\mathbf{x}_e$ 是平衡点. 偏导数是常数，为简便计，设

$$\left.\frac{\partial h}{\partial x_2}\right|_{x_e}=a \qquad \left.\frac{\partial h}{\partial x_1}\right|_{x_e}=b \tag{5}$$

今方程(4)写为

$$\begin{bmatrix}\Delta\dot{x}_1\\ \Delta\dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -b & -a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\end{bmatrix} \tag{6}$$

由于 Δy 等于 Δx_1，方程(6)可写作熟悉的形式

$$\Delta\ddot{y}+a\Delta\dot{y}+b\Delta y=0 \tag{7}$$

方程(6)和(7)的特征值是

$$\begin{aligned}\lambda_1&=-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}(a^2-4b)^{\frac{1}{2}}\\ \lambda_2&=-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}(a^2-4b)^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{8}$$

这里我们的目的是研究相平面上方程 (6)的运动. 一般说来 a、b 可设为任何实数，于是 λ_1 及 λ_2 可以是实数或复数. 在方程(6)的解 $\Delta\mathbf{x}(t)=\mathbf{\Phi}(t)\Delta\mathbf{x}(0)$ 中转移矩阵取形式

$$\mathbf{\Phi}(t)=[c_{ij}e^{\lambda_1 t}+k_{ij}e^{\lambda_2 t}]$$

若 λ_1 与 λ_2 是相异实数，$a^2>4b$ (9)

$\mathbf{\Phi}(t)=[c_{ij}e^{\lambda t}+k_{ij}te^{\lambda t}]$ 　　若 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, $a^2=4b$ (10)

$$\mathbf{\Phi}(t)=[e^{-\frac{1}{2}at}(c_{ij}\cos\omega t+k_{ij}\sin\omega t)]$$

$$\text{若 } \lambda_1 \text{ 与 } \lambda_2 \text{ 是复数}, a^2 < 4b \tag{11}$$

其中 $\omega = \frac{1}{2}(4b - a^2)^{\frac{1}{2}}$. 系数 c_{ij} 与 k_{ij} 是容易计算的，但颇为麻烦，因此这里就不列出了.

方程(1)的平衡点按照(8)式表出的方程(6)的特征值来分类. 特征值在复平面上的位置表示如图 6.7-1a 所示. 图 6.7-1a 画出两个复共轭特征值. Im 表示虚轴，Re 表示实轴. 若特征值在左半平面，系统是稳定的，因而有一个基态. 如果至少有一点在右半平面，系统是不稳定的，且运动是无界的. 在平衡点邻近的自由运动由特征值的位置来表征. 如图 6.7-1a 所表示的两个复特征值

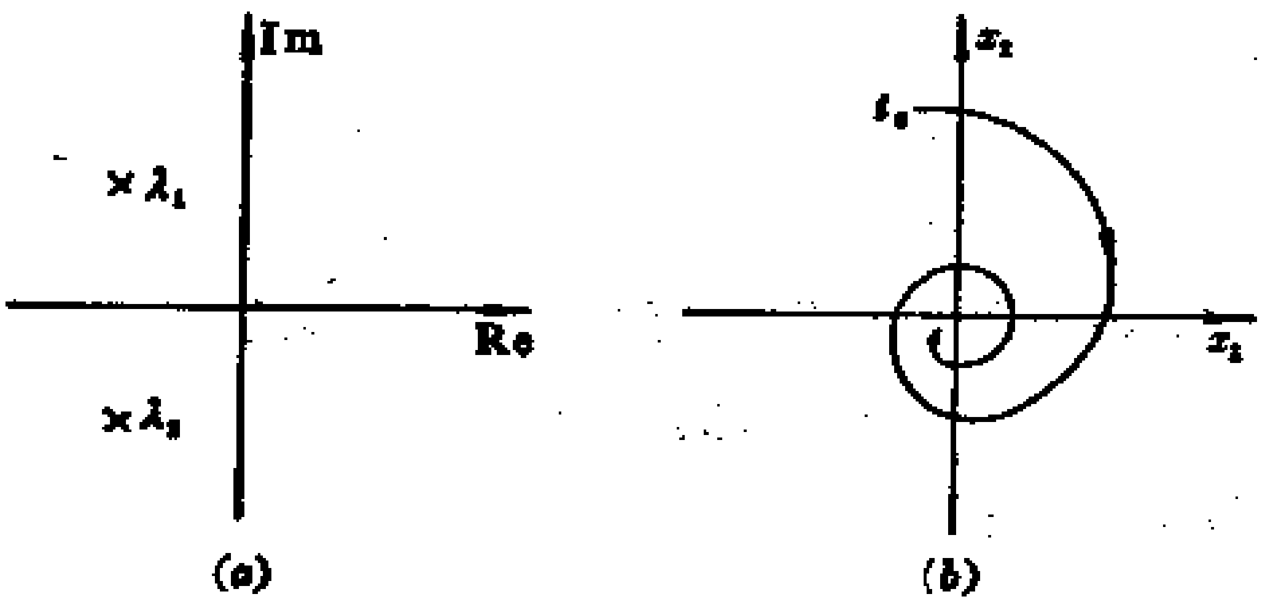
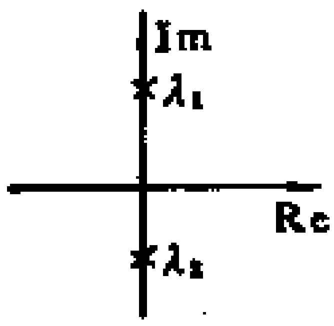
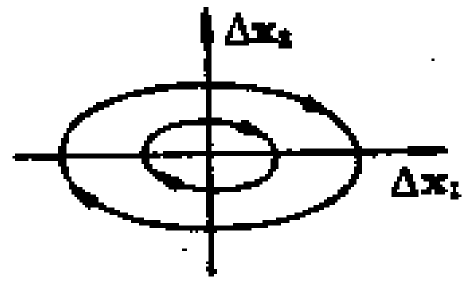
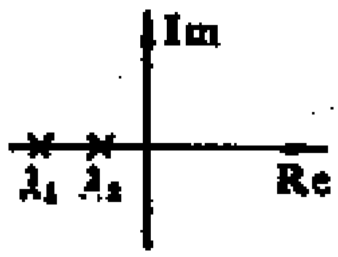
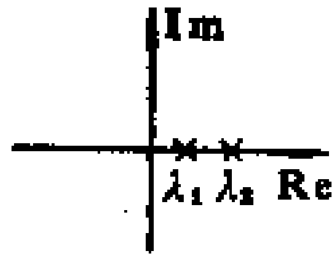
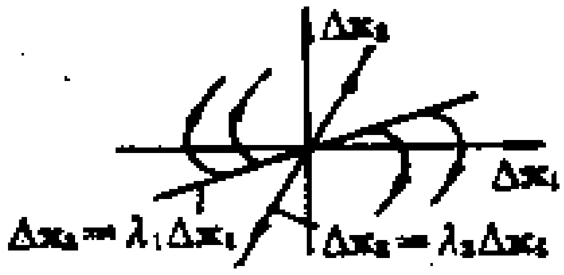
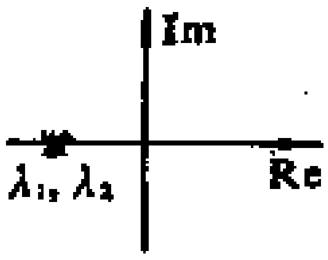
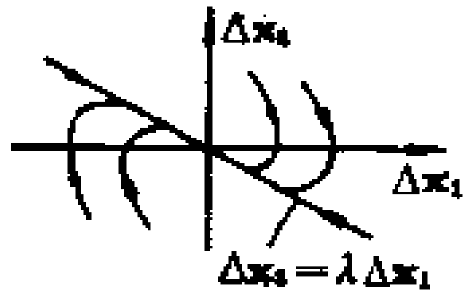
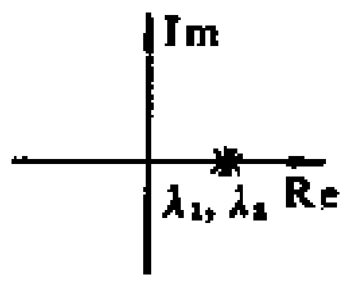
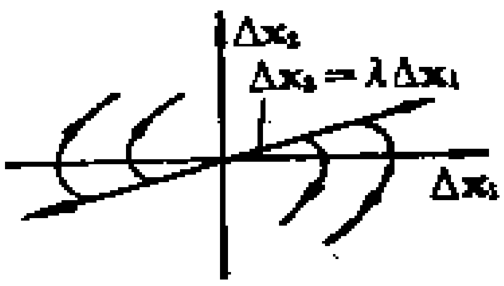
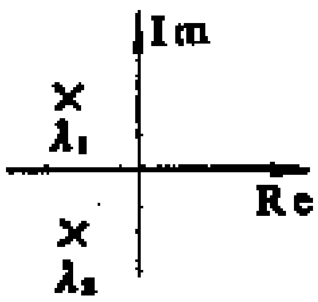
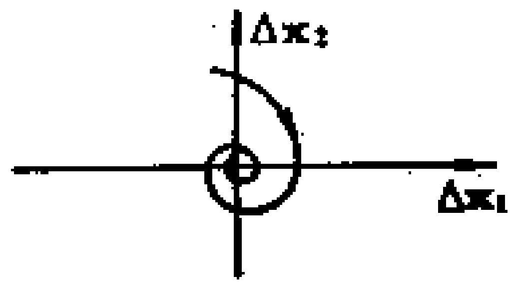


图 6.7-1　画在复平面上二个特征值和在相平面上对应的运动

在左半平面的情况，如(11)所指出的，运动是稳定的. 对于一个给定的初始条件，一条轨线可计算出来并且在相平面中画出来如图 6.7-1b 所示. (11)表示的运动是一个阻尼振动，所以轨线螺旋地围绕且趋于平衡点. 这个平衡点归类为稳定焦点. 注意到它是简单的因而也是孤立的. 其它的平衡点按照相应的特征值的位置称为中心、稳定结点、不稳定结点、不稳定焦点及鞍点. 把这些和其它的一些情况都列表并说明在图 6.7-2 中.

鞍点

例 6.3-1 中单摆的微小运动的特性是在(0, 0)为中心. 另一

平衡点	特征值	相平面	注释
中心 $a=0$ $b>0$			1. 简单平衡点 2. 轨线不趋于也不注入平衡点
稳定结点 $a>0$ $a^2>4b>0$			1. 简单平衡点 2. 当 $t\to\infty$ 轨线注入平衡点
不稳定结点 $a<0$ $a^2>4b>0$			1. 简单平衡点 2. 当 $t\to-\infty$ 轨线注入平衡点
稳定退化结点 $a>0$ $a^2=4b$			1. 简单平衡点 2. 当 $t\to\infty$ 轨线注入平衡点
不稳定退化结点 $a<0$ $a^2=4b$			1. 简单平衡点 2. 当 $t\to-\infty$ 轨线注入平衡点
稳定焦点 $a>0$ $0<a^2<4b$			1. 简单平衡点 2. 当 $t\to\infty$ 轨线趋于平衡点

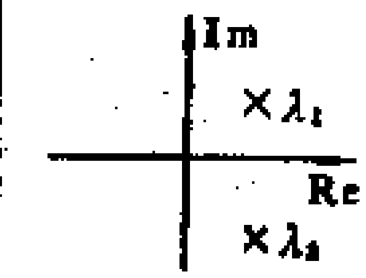
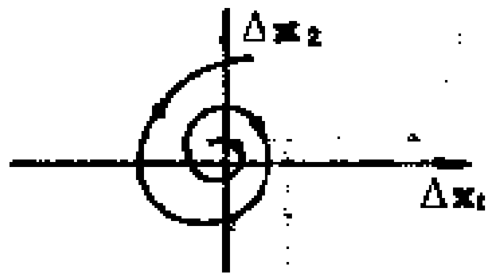
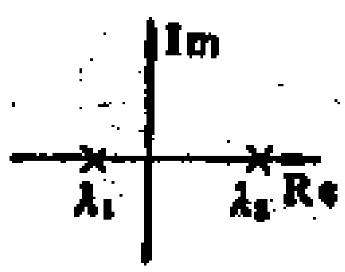
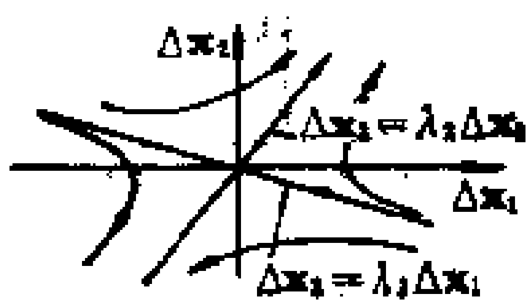
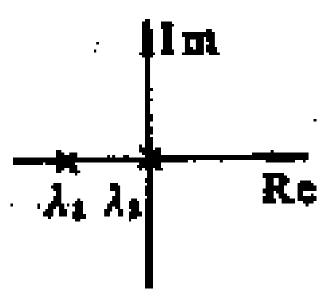
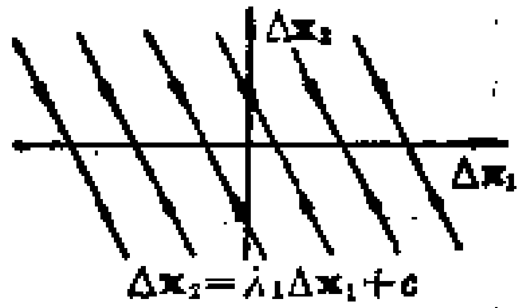
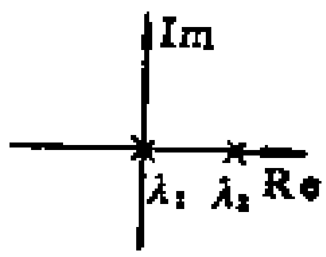
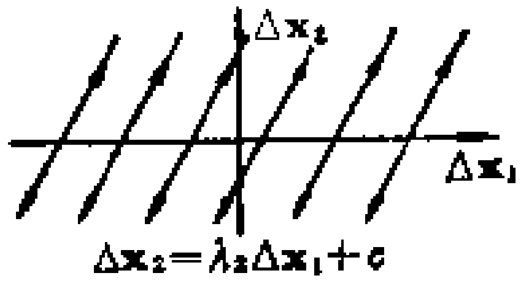
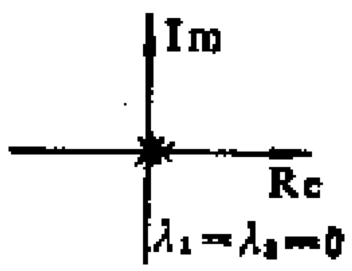
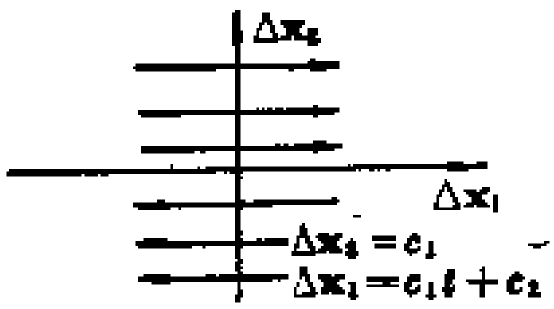
平衡点	特征值	相平面	注释
不稳定焦点 $a<0$ $0<a^2<4b$			1. 简单平衡点 2. 当 $t\to-\infty$ 轨线趋于平衡点
鞍点 $b<0$			1. 简单平衡点 2. 轨线注人或离开平衡点
$b=0$ $a>0$			1. 非简单平衡点 2. 当 $t\to\infty$ 全部轨线注人 Δx_1 轴上的点
$b=0$ $a<0$			1. 非简单平衡点 2. 当 $t\to-\infty$ 全部轨线注人 Δx_1 轴上的点
$a=0$ $b=0$			1. 非简单平衡点(Δx_1轴) 2. 没有轨线注人或趋于 Δx_1 轴上的平衡点

图 6.7-2 有关 $\ddot{y}+h(y,\dot{y})=0$, $x_1=y$, $x_2=\dot{y}$ 的可能奇异点的特征

方面，微小运动在平衡点(π, 0)的特性是鞍点．中心分类为稳定的平衡点，而鞍点分类为不稳定的平衡点．若设运动在开始时是$\theta=\dot{\theta}=0$，摆将保持静止．其次，若单摆受到轻微的扰动，在平衡点邻近发生谐振运动．另一方面，若设单摆在$\theta=\pi$静止，除非受扰动它仍是静止的，可是当摆受到扰动时，它立即远离平衡点的微小邻域运动．因此我们看到称这种平衡点为不稳定的原因．鞍点会在许多系统中出现，如下例所示．

例 6.7-1 若取$x_1=y$，$x_2=\dot{y}$，系统

$$\ddot{y}+\dot{y}+y-y^2=0$$

有两个平衡点(0, 0)及(1, 0)．在后一点，线性方程是

$$\Delta\ddot{y}+\Delta\dot{y}-\Delta y=0$$

对应的特征值是

$$\lambda_1=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2} \qquad \lambda_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$$

由图 6.7-2 我们看到这些特征值对应于鞍点；亦即在此情况 $a=1$，$b=-1$．

在平衡点(0, 0)得到线性方程

$$\Delta\ddot{y}+\Delta\dot{y}+\Delta y=0$$

对应的复特征值为

$$\lambda_1=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \lambda_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

由图 6.7-2 我们看到这种情况对应稳定焦点；亦即 $a=1$，$b=1$，$a^2-4b<0$．此系统的相图如图 6.7-3 所示．

分界线

如图 6.7-2 及 6.7-3 所示的注入鞍点的四条轨线是特别有趣的．这些轨线称为分界线．分界线把相平面分为不同的运动区域．例如，考察在图 6.7-3 中标着A和B的两条轨线．轨线A开始于分界线一支的左边稍近处，并且趋于原点．而轨线B开始于分界线一支的右边稍近处却走向无穷．

在原点的特征值

如图 6.7-2 所示，若有一个特征值在复平面的原点处，则有非

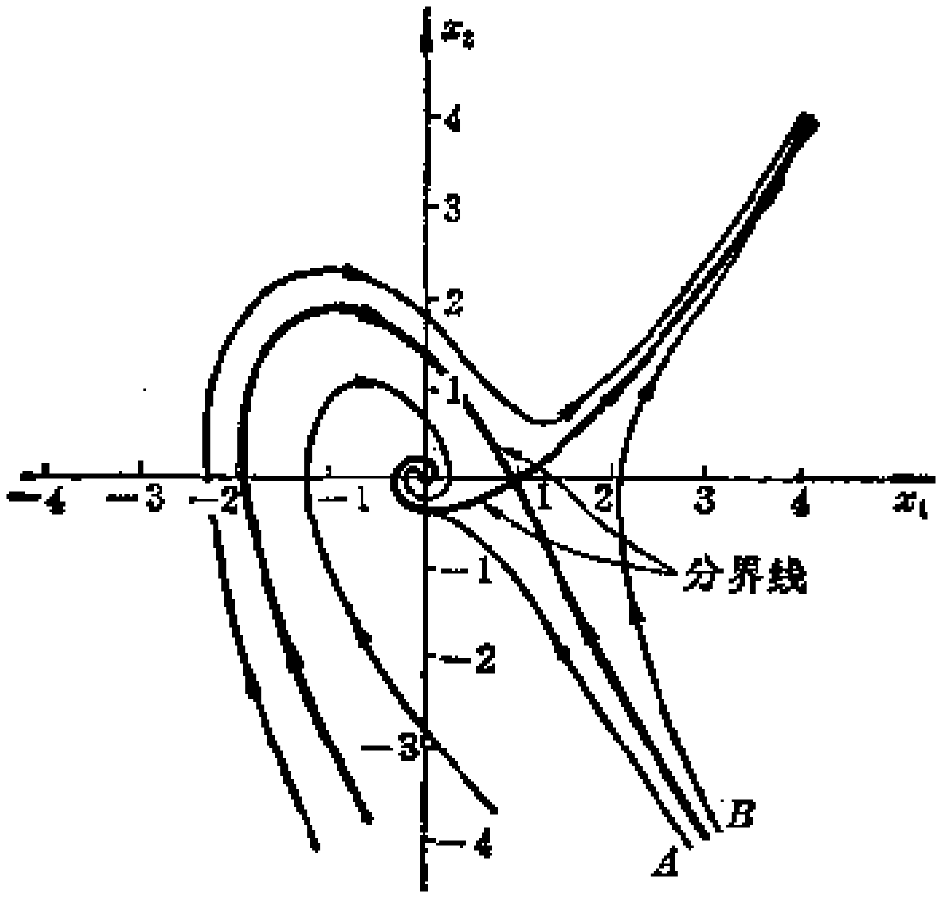


图 6.7-3　$\ddot{y}+\dot{y}+y-y^2=0$, $y=x_1, \dot{y}=x_2$ 的相图

简单平衡点出现．在整个 Δx_1 轴上一切点都是平衡点．这时基态依赖于初始条件．若二个特征值都在原点，基态就不存在．当 t 增大时，所有轨线都是无界的．当 $\Delta\dot{\mathbf{x}}(t_0)=0$ 时发生一种例外情况，这时状态对所有的时间保持固定在 Δx_1 轴上的一点．

坐标轴的变换

在这一节里讨论了一般二阶自治微分系统的几何学．几何学是在相平面上讨论的，此相平面是按状态矢量定义为 $x_1=y, x_2=\dot{y}$ 建立的．对另外的状态变量也是一样的，但相图却随之而变化．然而某些特征是保持不变的(不变量)．例如平衡点的个数以及相应的特征值就是不变量．一般说来对 n 维系统也是对的．在讨论 n 维系统时，并不试图区分平衡点为中心、结点等等，只是简单地分为稳定的和不稳定的．

6.8. 极限环

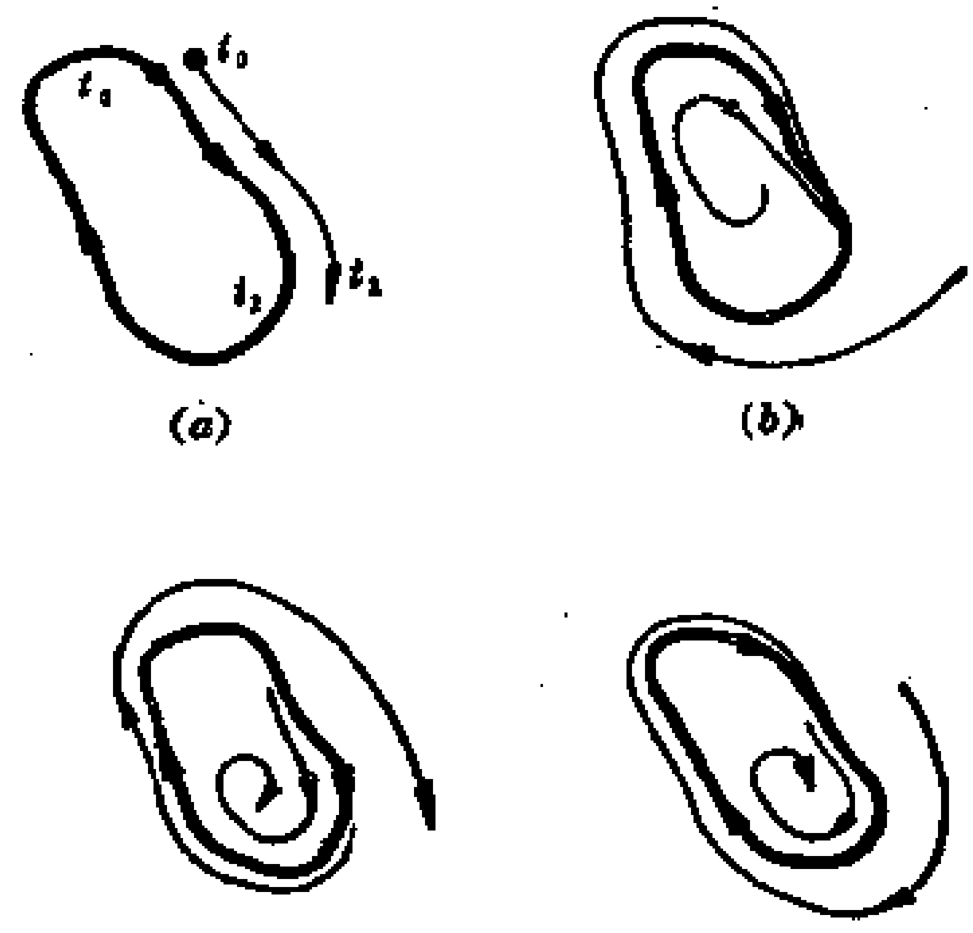
极限环在物理上的真实系统中是常见的．持续振动例如飞机翼的颤动或电振荡器的振动都是极限环的例子．一般说来，任何

周期运动都用极限环来描述. 在二阶自治系统极限环是闭轨线. 例 6.3-2 的单摆的相图就包含极限环, 如图 6.3-3 所示. 若初态 $\mathbf{x}_0$ 在极限环上, 以后的轨线在极限环上运动, 且周期地通过 $\mathbf{x}_0$.

极限环是分界线, 并分相平面为两个部分, 一个是"内部", 另一个是"外部". 由于轨线不能相交, 外部的轨线永远不能进入内部, 反之也对.

极限环可分为稳定的、不稳定的或半稳定的. 参看图 6.8-1a 且假设运动在极限环轨线上是稳态的. 此运动称为未受扰动的运动. 今设我们扰动此运动使在 t_0 稍微离开极限环, 此运动称为微小扰动自由运动. 比较在以后的时刻 t_1 未受扰动运动与微小扰动运动间的对应点, 如果当时间增加时, 这两个点间的距离仍是微小的, 则极限环是稳定的. 在内部和外部双方的微小扰动都必须检查. 存在三种可能性; 参看图 6.8-1b 到 d.

1. 内外双方的微小扰动运动当时间增加时螺旋地盘近极限环, 在这种情况极限环是稳定的.



(a) (b)

(c) (d)

图 6.8-1 极限环的稳定性

2. 内外双方的微小扰动运动螺旋地离开极限环，在这种情况极限环是不稳定的.

3. 一方的微小扰动运动螺旋地盘近极限环而另一方却离开极限环，在这种情况极限环称为半稳定的.

极限环对相图的几何结构是重要的. 极限环一般表示稳态条件，全部轨线可能收缩或扩张于它们. 确定极限环位置的解析方法实际上是不存在的. 只可能在一些特殊情况求出极限环的确切的性质和位置. 通常我们只满足于确定极限环的存在性. 例如，如果我们能够找到一圆 C_1，如图 6.8-2 所示，使与它相交的一切轨线从外部走向内部，又能在 C_1 内找到一个较小的圆 C_2，使全部轨线从内部走向外部①，则在两圆之间至少存在一个极限环. 有时 $\|\mathbf{x}\|^2=r^2=x_1^2+x_2^2$ 对时间的变化率可用以决定轨线是收缩的或扩张的区域. 例如考察自治系统

$$\dot{x}_1=x_2 \qquad (1)$$

$$\dot{x}_2=-h(x_1, x_2) \qquad (2)$$

r^2 对时间的导数为

$$\frac{dr^2}{dt}=\frac{d(x_1^2+x_2^2)}{dt}=2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2 \qquad (3)$$

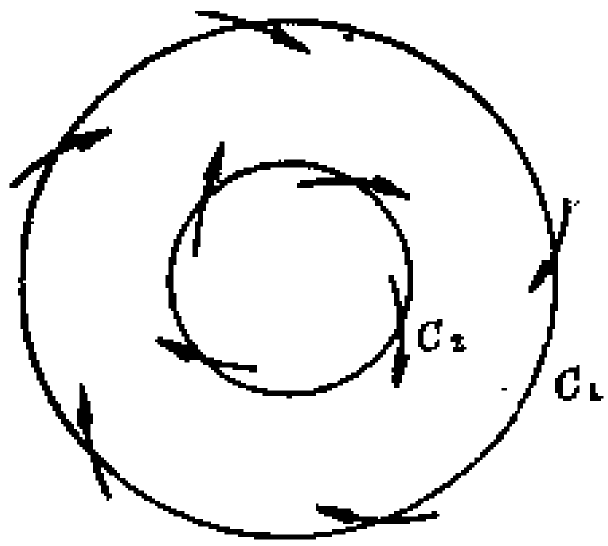


图 6.8-2 极限环的边界

把方程(1)，(2)代入(3)，得到

$$\frac{1}{2}\frac{dr^2}{dt}=x_2[x_1-h(x_1, x_2)] \qquad (4)$$

这是只含 x_1 和 x_2 的代数表达式，用它可以研究在相平面的各个区域内轨线的收缩和扩张. 这个思想可用下例说明之.

例 6.8-1 考察范德坡方程[Minorsky, 1947]

$$\ddot{y}-\epsilon(1-y^2)\dot{y}+y=0 \quad \epsilon>0$$

① 此处应加上"而 C_1 与 C_2 之间的环域内没有平衡点"这一条件. ——译者.

若令 $y=x_1, \dot{y}=x_2$, 则

$$\dot{x}_1=x_2$$
$$\dot{x}_2=\epsilon(1-x_1^2)x_2-x_1$$

r^2的变化率是

$$\frac{1}{2}\frac{dr^2}{dt}=\epsilon x_2^2(1-x_1^2)$$

$\frac{dr^2}{dt}$的符号经过 $x_1^2=1$ 起变化. 由于 ϵ 是正的, 在 $x_1^2>1$ 区域内轨线是收缩的, 而在区域 $x_1^2<1$ 内轨线是扩张的. 如图 6.8-3 所示, 所以范德坡方程显示了一个稳定极限环.

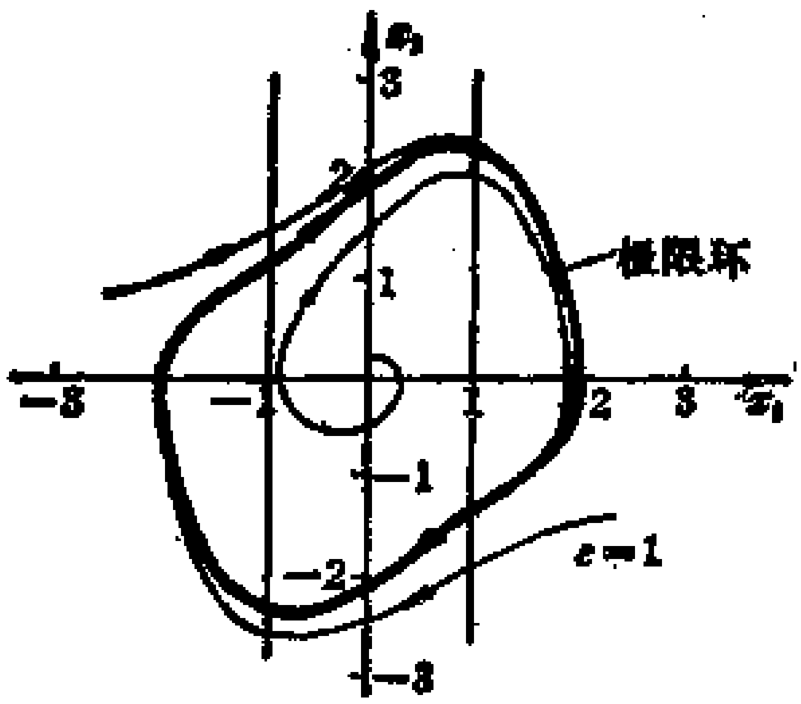


图 6.8-3 范德坡方程的相图

上面的确定极限环存在的方法不是经常可以使用的. 一般说来, 还没有已知的方法用于确定极限环存在的必要充分条件. 然而有几个定理在一定程度上可以使用 (例如参看庞加莱[1882]及本迪克生[1901]).

6.9. 继电器控制系统

如已见到的, 相平面对关于状态空间的运动建立一些直观概念在几何上是有用处的. 我们现在把这些概念和简单继电器控制系统的设计问题联系起来. 此系统表示如图 6.9-1a, 继电器的输入输出特性如图 6.9-1b 所示. 被控制系统由微分方程

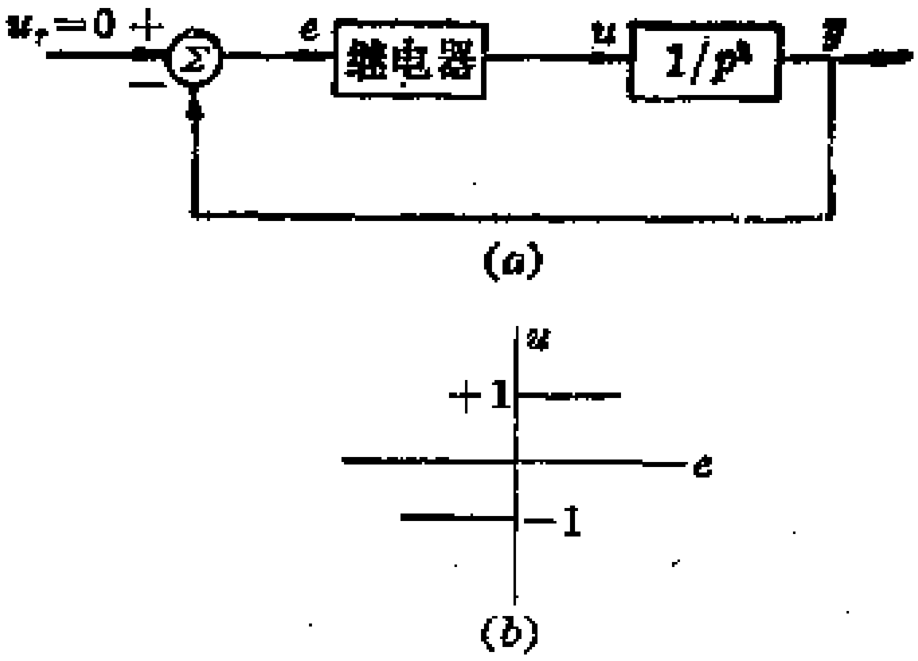


图 6.9-1　具有单位反馈的继电器控制系统

$$\frac{d^2y}{dt^2}=u \qquad u=\pm 1 \tag{1}$$

所描述．如图 6.9-1 所示，y 是输出，u 是输入，它限于取值±1．状态变量定为 $x_1=y$，$x_2=\dot{y}$．目的是转换状态变量 x_1 和 x_2 到原点．

因为 u 对于 $e<0$ 或 $e>0$ 都是常数，方程(1)的解容易得到．若写方程(1)为

$$\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{1}{x_2}u \quad \text{或} \quad x_2dx_2=udx_1$$

则积分给出

$$x_2^2=x_2^2(t_0)+2ux_1-2ux_1(t_0) \tag{2}$$

关系式(2)对于固定的 u 表示一族抛物线，如图 6.9-2a 及 b 所示．

由图 6.9-1a 我们注意到误差信号 $e=-y=-x_1$．所以所要求的控制信号当 $x_1>0$ 是 $u=-1$ 及当 $x_1<0$ 是 $u=+1$．图 6.9-2c 是这个反馈系统的相图．注意到对任何已知初始条件此系统运行在一极限环上．当运动穿过 x_2 轴时，控制转换从 $u=+1$ 到 $u=-1$，或者相反，转换发生的直线称为转换线．在这个问题中 x_2 轴是一条转换线．显然此运动不趋向原点．

速度反馈

考虑同样的控制系统，但这时有一微分器放在反馈道路上，如

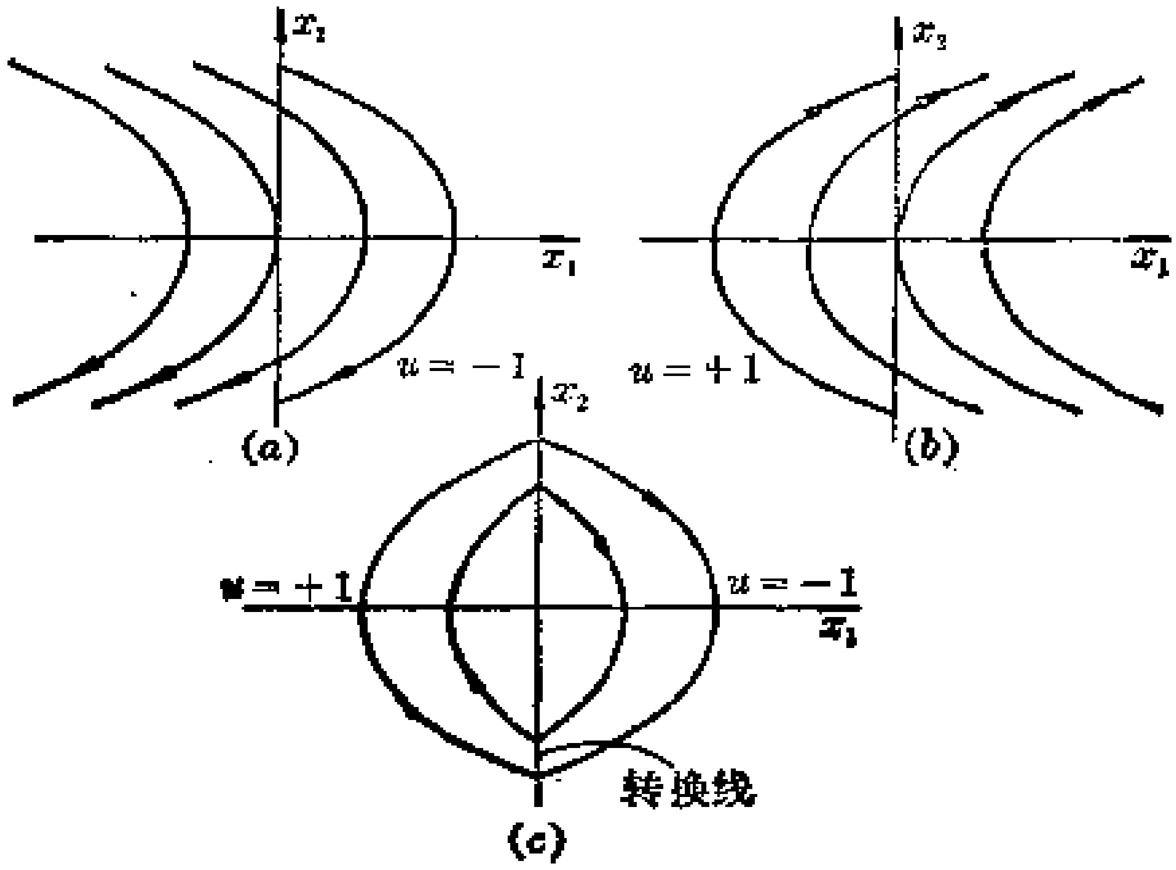


图 6.9-2 继电器反馈控制系统的轨线

图 6.9-3a 所示. 这个系统称为速度反馈系统. 对于这个系统误差信号是两个状态变量 x_1 和 x_2的线性组合，即

$$e=-\dot{y}-ky=-x_2-kx_1 \tag{3}$$

由继电器特性(图 6.9-1b)，我们看到当

$$x_2+kx_1=0 \tag{4}$$

时发生转换，因为

$$u=\begin{cases}+1 & \text{当 } x_2+kx_1<0\\ -1 & \text{当 } x_2+kx_1>0\end{cases} \tag{5}$$

方程(4)是转换线. 这个系统的相图表示在图 6.9-3b 中.

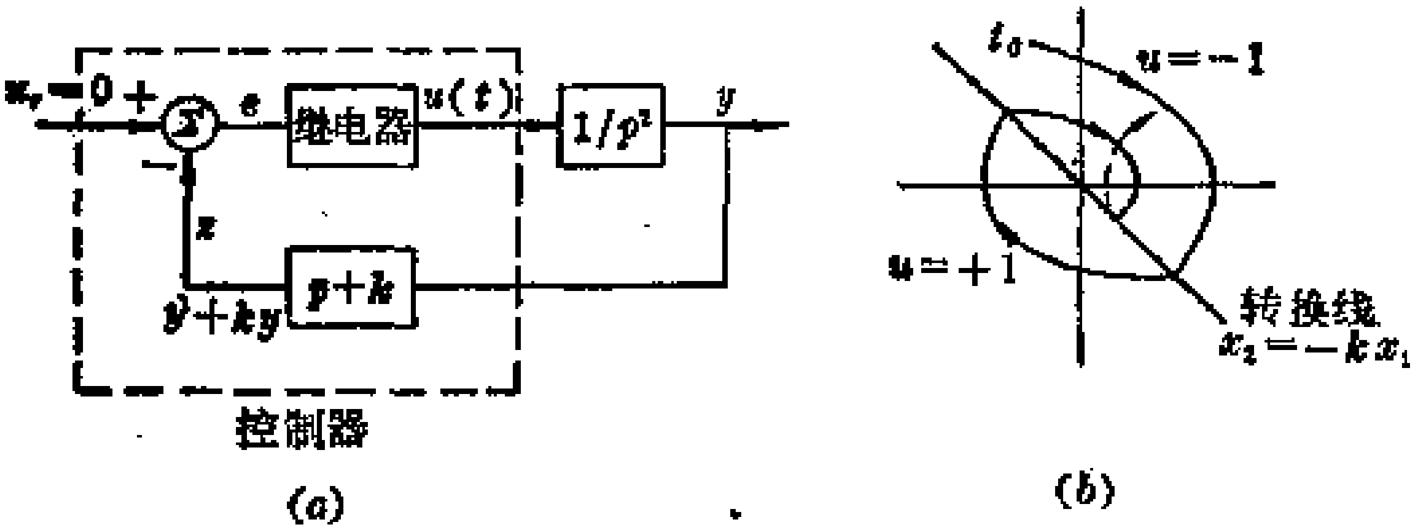


图 6.9-3 具有速度反馈的继电器控制系统

正如我们原来所希望的，这时运动表现为收缩于原点. 可是注意到当一过转换线，轨线的斜率成为等于或小于转换线的斜率，即当

$$\frac{dx_2}{dx_1}=u\frac{1}{x_2}\leqslant -k \qquad (在转换线上)$$

一种不定情况出现了. 在图 6.9-3b 的 A 点表示这种情况. 当运动趋于 A 点时，控制信号是 $u=-1$. 当运动与转换线相交时，u 转换到 $+1$. 可是如果 u 仍保持 $+1$，运动将跟着虚线走入 $u=-1$ 的区域. 所以继电器必趋向来回转换，以致运动仍停留在 A 点(?). 实际上如这里叙述的理想的继电器是不存在的. 大部分继电器将显示滞区及后冲特性. 当考察了这些特性之后[Graham 和McRuer, 1961]，不定的继电器转换情况才能更好的得到了解. 我们把这些问题留给读者(习题6.22)。

6.10. 结束语

在这一章里我们讨论了运动的概念，并且利用在相平面上画轨线的方法介绍了一些直观的思想. 从概念上说，这些运动的想法可以推广到 n 维空间. 其中特别有兴趣的是平衡点的思想和在这些点的邻域内的运动. 我们定义了状态空间内的点为孤立点、简单点以及正则点. 并讨论在这些点上和这些点周围的运动. 为了研究在某些参考点的微小邻域内的运动，我们"线性化"了这些系统.

在讨论某个参考点的微小邻域内系统的运动中，引入了稳定性的概念. 稳定性的直观定义强调了系统的状态是有界的，即停留在初态的某个微小邻域内. 然后对于定常自由线性系统利用其系统描述矩阵的特征值建立了一些定理.

在定义 6.6-1 我们给出任何自由线性系统的稳定性的正式定

义，并推导出一些有关的定理．然后定义了有界输入和有界输出稳定性并且不予证明给出一个统一的定理．这样，在这一章里我们举例说明平衡点与稳定性的思想，首先是借助于相空间的几何学，然后推广这些思想并加以抽象而形成一些定义和建立一些定理．我们给出线性系统的稳定性以十分广泛的讨论．然而读者可继续钻研定理 6.6-6 所介绍的更详细的结果．

在许多情况，系统的详细研究最好利用数字计算机或模拟计算机技术去完成．微分系统写成矢量形式

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \tag{1}$$

或

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}+\mathbf{B}(t)\mathbf{u} \tag{2}$$

可以直接用如Runge-Kutta 的数值计算方法去积分[Hildbrand, 1956]，或者在模拟计算机上直接设计程序．然而借助于计算机之前最好是用铅笔和纸对系统(1)或(2)作初步的近似研究．如果(1)或(2)可用二阶系统合理地近似，这一章中相平面概念就成为有用的了．其次如果问题中的系统是非线性的，§6.5的线性化技巧可对运动得出某些信息．按照这些近似技巧我们通常能够预料计算机解法的某些方面．因此，在为计算机编制程序时很可能发生误差，预料的结果可以用于识别某些设计误差．

参考资料

Bendixson, I.: Sur les Courbes définies par des équations différentielles, *Acta Mathematica*, vol. 24, pp. 1—88, 1901.

DeRusso, P. M., R. J. Roy, and C. M. Close: *State Variables for Engineers*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1965.

Graham, D., and D. McRuer: *Analysis of Nonlinear Control Systems*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1961.

Hildebrand, F. B.: *Introduction to Numerical Analysis*, McGraw-

Hill Book Company, New York, 1956.
Lefshetz, S., *Differential Equations: Geometxic Theory*. Interscience Publishers, Inc., New York, 1957.
Minorsky, N.: *Introduction to Nonlinear Mechanics*, J. W.Edwards, Publisher, Inc., Ann Arbor, Mich., 1947.
Poincaré, J. H.: Mémoire sur les courbes definies par une équation differentielle, *J. Math. Pures Appl.*, ser. 3, vol. 7, pp. 375-422, 1881; vol. 8, pp. 251-296, 1882; ser.4, vol. 1, pp. 167-244, 1885; vol. 2, pp. 151-217, 1886.
Poincaré, J. H.: *Les Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, vol 3, Gauthier-Villars, Paris, 1892; also Dover Publications, Inc., New York, 1957.
Stern, T. E.: *Theory of Nonlinear Networks and Systems: An Introduction*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1965.
Truxal, J. G.: *Automatic Feedback Control System Synthesis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1955.
Wylie, C. R., Jr.: *Advanced Engineering Mathematics*, 3d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.

习题

6.1. 作出系统

$$\ddot{y}+y-y^2=0 \qquad x_1=y,\ x_2=\dot{y}$$

对于初始条件

y_0	4	2	0	-2	-4
$\dot{y}_0$	-4	-4	-4	-4	-4

的相平面轨线. 注意到能求出一个封闭形式的解.

答: $\frac{1}{2}(\dot{y}^2-\dot{y}_0^2)=\frac{1}{3}(y^3-y_0^3)-\frac{1}{2}(y^2-y_0^2)$

6.2. 作出系统

$$\ddot{y}+\dot{y}+y-y^3=0 \qquad x_1=y,\ x_2=\dot{y}$$

的相平面轨线．考虑如习题 6.1 同样的初始条件．

6.3．作出由

$$\ddot{\theta}+\epsilon\dot{\theta}+\sin\theta=0 \qquad x_1=\theta,\ x_2=\dot{\theta}$$

所表的阻尼单摆的相图，其中 $\epsilon>0$ 但很小．

6.4．方程 (6.3-3) 对作出相平面轨线有时是很有用的．令 $\frac{dx_2}{dx_1}$ 等于常数，即

$$\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1}=\frac{dx_2}{dx_1}=-\frac{h(x_1,x_2)}{x_2}=\alpha$$

可求出代数曲线，一切轨线均以斜率 α 通过它．选取 α 的各种方便的数值，并在相平面上作出对应的代数曲线．这些曲线称为等倾线 [Graham 及 McRuer, 1961]．作出几条等倾线后，近似轨线用连续曲线(从初态出发)以对应的斜率 α 通过每一条等倾线是可以很快地描出的．

a．试证二阶线性自治系统的等倾线都是直线．

b．用等倾线法重作习题 6.1．

6.5．利用等倾线(参见习题 6.4)，描出线性系统

$$\ddot{y}+a\dot{y}+by=0$$

的相图．设 $x_1=y$ 及 $x_2=\dot{y}$，并考察 a 与 b 的各种值．

a．$a=3$，　$b=2$

b．$a=2$，　$b=2$

c．$a=-3$，$b=2$

d．$a=-2$，$b=2$

e．$a=1$，　$b=-2$

f．$a=1$，　$b=0$

g．$a=0$，　$b=0$

考察初始条件 $x_1=-2, -1, 0, 1, 2$；$x_2=1$．

6.6．取状态变量 $x_1=y+\dot{y}$ 及 $x_2=\dot{y}$，重作习题 6.5*a*．

6.7．*a*．重作习题 6.5*a*，但由

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ -\lambda_2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

定义变换变量．设 $\lambda_1=-2, \lambda_2=-1$，并考察初始条件 $z_1=-2, -1, 0, 1, 2$；

$z_2=1$.

b. 重作习题 6.5*e*, 但如习题 6.7*a* 一样变换变量, 并考察初始条件 $z_1=-2, -1, 0, 1, 2$, $z_2=1$; $z_1=-2, -1, 0, 1, 2$, $z_2=-1$. 设 $\lambda_1=-2$ 及 $\lambda_2=1$.

6.8 *a*. 二阶系统具有状态变量 $x_1=y$ 及 $x_2=\dot{y}$, 试证消耗的时间 t_1-t_0 是由

$$t_1-t_0=\int_{x_1(t_0)}^{x_1(t_1)}\frac{dx_1}{x_2}$$

给出的.

b. 对系统 $\ddot{y}=-1$, $x_1=y$, $x_2=\dot{y}$ 求 t_1-t_0, 这里 $\mathbf{x}(t_0)=(0, 2)$ 及 $\mathbf{x}(t_1)=(0, -2)$.

6.9. 对形如

$$\frac{dx_2}{dx_1}=-\frac{x_1-g(x_2)}{x_2}=\alpha$$

的系统, 试证轨线的瞬时曲率中心是在

$$x_{1c}=g(x_2) \qquad x_{2c}=0$$

由此性质可导出一个轨线作图法. 那就是, 考虑到事实: 离开一点的轨线将绕对应瞬时曲率中心旋转. 这个结果导致李纳特作图法[Graham及McRuer, 1961]. **提示**: 在 x_1x_2 平面上作出 $x_{1c}=g(x_2)$ 及 $x_{2c}=0$ 并证明

$$\operatorname{tg}\phi=\frac{x_2-x_{2c}}{x_1-x_{1c}}=-\frac{1}{\alpha}$$

α 的定义参见习题 6.4.

6.10. 用李纳特作图法(参见习题 6.9)作出系统

$$\ddot{y}+\theta(\dot{y})+y=0 \qquad \dot{y}_0=0, \quad y_0=-4$$

的轨线. 这里 $\theta(\dot{y})$ 给出在图 P 6.10 中. 注意到在相坐标平面($x_1=y$, $x_2=\dot{y}$)上作出 $x_{1c}=-x_2$ 是方便的.

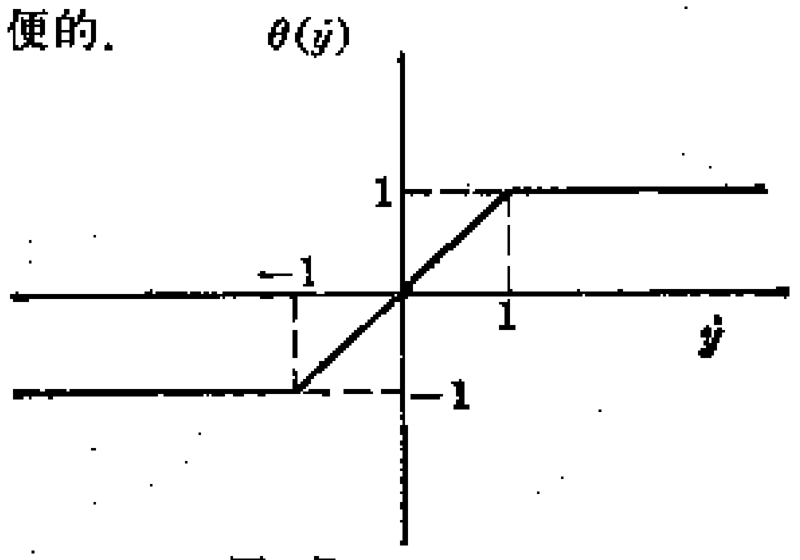


图 P 6.10

6.11. 求下列系统的平衡点并将其分类，作出相图。

a. $\ddot{y}+y\dot{y}+2y-y^2=1$

b. $\ddot{y}+y\dot{y}+2y-y^2=0$

c. $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1x_2-x_1\\ x_1x_2-x_2\end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin x_2\\ \cos x_1-\sin x_2\end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 8\\ 1 & -2 & 0\\ 1 & 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\ 2\\ 1\end{bmatrix}$

f. $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$

g. $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$

h. $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{2}\\ 1 & -\frac{3}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$

i. $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\ -x_1^2-x_2\end{bmatrix}$

6.12. 用李雅普诺夫第一方法研究习题 6.11 中各系统所有平衡点的稳定性。

6.13. 研究例 6.3-1 中的系统的稳定性，先利用定理 6.6-1 再利用定理 6.6-5。

6.14. 作出例 6.3-1 中系统的相图，其状态变量定义为 $x_1=\theta$ 及 $x_2=\dfrac{\dot{\theta}}{\omega}$。

6.15. 在平衡点(0, 0)把例 6.3-2 中的系统线性化，并如习题 6.13 一样讨论它的稳定性。在平衡点(π, 0)把此系统线性化并利用习题 6.13 所提供的两个方法再讨论在这一点的稳定性。

6.16. 对例 6.3-2 中的系统求非线性剩余（参见 6.5-1 式）。对这个系统 $\dfrac{\|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|}$ 是否趋于零？

6.17. 在平衡点(1, 0, 0), (0, 0, 0)及(−1, 0, 0)的微小邻域内研究例6.5-1中的系统的稳定性.

6.18. 在平衡点(0, 0)求例6.5-2中系统的线性近似式.

6.19. 在例6.6-2中设 $x_1=y$ 及 $x_2=\dot{y}$. 求状态方程并在原点把此系统线性化. 求非线性剩余.

6.20. 试证系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\ (1-x_1^2-x_2^2)x_2-x_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ u\end{bmatrix} \qquad u=0$$

有一个极限环. 它是稳定的还是不稳定的? 求所有的平衡点并将其分类, 作出相图.

答: $x_1^2+x_2^2=1$ 是一个解.

6.21 不用求解试求习题6.20中的系统关于极限环的受干扰运动方程. 作出几条特殊的受干扰轨线. 它们穿过极限环线吗?

答: $\Delta\dot{x}_1=\Delta x_2$; $\Delta\dot{x}_2=-(1+\sin 2t)\Delta x_1-(1+\cos 2t)\Delta x_2+\Delta u$

6.22. 作出如图P 6.22所示的继电器系统在 x_1, x_2 坐标系 ($x_1=y$, $x_2=\dot{y}$)中的相图. 首先求出继电器的转换线, 其次求出在对应于定常继电器输出的区间中的运动方程. 对于对应于(b)及(c)中的继电器的每一个系统, 研究两种情况: 单位反馈 $H=1$ 及速度反馈 $H=1+p$. 求转换线上继电器将发生"振荡"的所有的点, [Graham 及 McRuer, 1961].

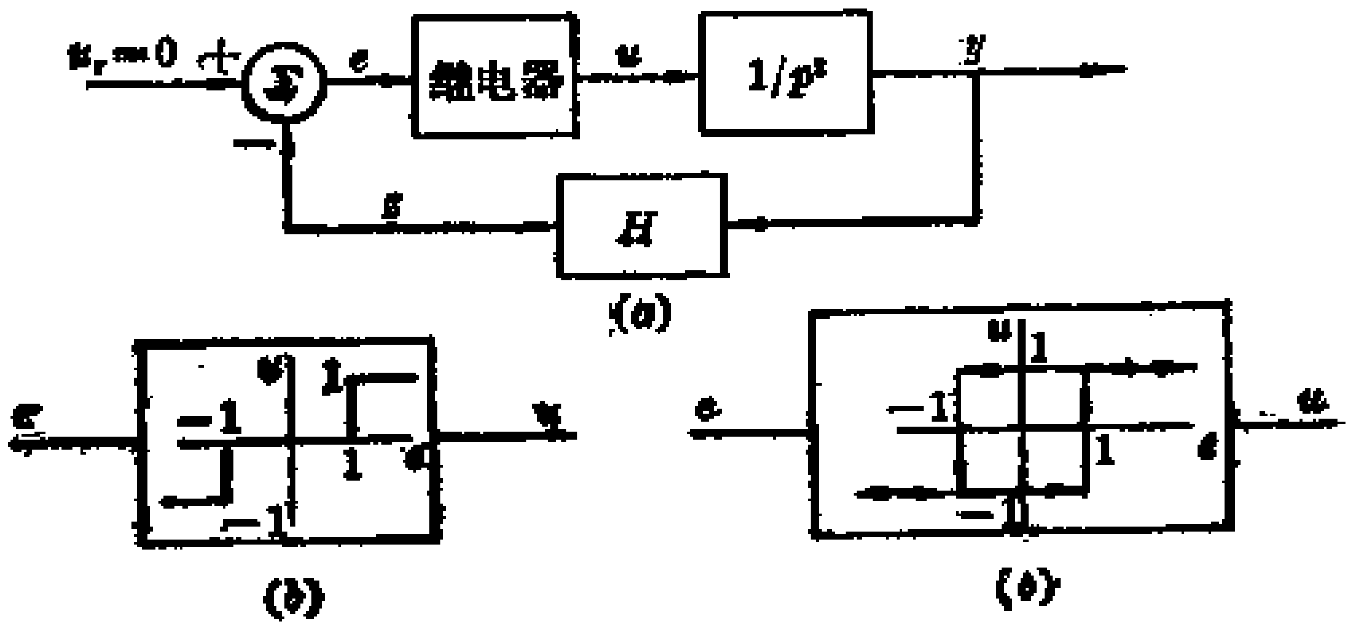


图 P6.22

6.23. 在图6.9-3a所示的继电器控制问题中, 反馈元件用

$$z=\frac{1}{2}\dot{y}^2\operatorname{sign}\dot{y}+y$$

来代替并重作分析．计算初态 $\mathbf{x}(0)=(1,0)$ 传送到原点 $(0,0)$ 的时间．沿任一 $\mathbf{x}_0$ 出发的轨线转换的最大数是什么？

第七章　李雅普诺夫稳定性

7.1. 引言

在§6.5我们讨论了有关稳定性的一些基本想法．在§6.6介绍了李雅普诺夫第一方法并且建立了决定平衡点稳定性的必要和充分条件．我们基本上限于讨论线性系统．换言之，在§6.6建立的稳定性条件应用于微小运动，它充分地描述了在平衡点邻近的线性运动．我们又看到定常线性系统只依赖于特征值．所以线性定常系统的大范围运动的稳定性可容易地建立．

另一方面断定非线性系统的大范围运动的稳定性是困难的．原则上，大范围运动的稳定性能够由李雅普诺夫第二方法或李雅普诺夫直接方法来决定．然而我们将要看到，第二方法只是建立了稳定性的充分条件．在这一章里，给出稳定性的正式定义并且介绍李雅普诺夫函数．然后和相空间内稳定边界概念一道介绍了第二方法．最后介绍了对于几个控制系统作出李雅普诺夫函数的例子．

一般说来，稳定性的观念是颇为模糊的．依照所需定义的稳定性而有不同的意思．考察下面各种学科中的稳定性也许是有趣味的：天文学家关心的是行星的扰动运动．化学家研究化学反应的速度及稳定性．商人关心股票行情的涨落．心理学家分析人的行为的稳定性．电子工程师为无线电广播设备设计稳定的振荡器．控制系统工程师设计高精度的位置随动系统．数学家结合数学结构假设边界函数与收敛条件．这些例子说明稳定性必须按照预期的用途来定义，并且一种定义可与另一种定义完全不同．读者

可能对稳定性有一些先入之见，为了消除这些偏见，考察下面的例子.

例 7.1-1 假设以速率 r 存款于储蓄所，且设付给利率为 k. 问全部存款 c 是多少？在连续的基础上，方框图 7.1-1 是这个系统的表示法. 反馈路线表示利息加在或复算在存款中. r 与 c 间的关系是

$$\frac{c}{r}=\frac{1}{p-k} \tag{1}$$

若 r 是一个阶跃函数 $r_0 1(t)$，则全部存款是

$$c(t)=\frac{r_0}{k}(e^{kt}-1) \qquad k>0, \quad t\geqslant 0 \tag{2}$$

它将随时间而成为无限.

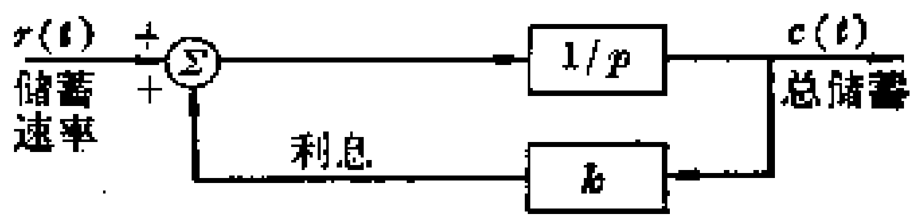


图 7.1-1　银行储蓄增长的方框图

就储蓄而言，例 7.1-1 的系统是稳定的，因为目的就是要有不断增加的储蓄. 另一方面，控制系统工程师却说方程(1)是不稳定的，因为它有一个特征值或极点在右半平面. 这个例子着重说明稳定性只不过是一种观点.

在本章里给出对系统工程有广泛应用领域的稳定性定义. 我们看到在稳定性的研究中有两个基本观点，即

1. 运动的界限或边界.
2. 问题中的时间区间.

一般，如果系统在所要求的操作时间内运动是有界的，我们就说系统是稳定的. 在本章中我们首先讨论由李雅普诺夫定义和发展的稳定性. 研究的方法称为李雅普诺夫第二方法或直接方法. 下例说明与李雅普诺夫稳定性有关的一些物理概念.

例 7.1-2 考察由

$$\ddot{y}+f(\dot{y},y)\dot{y}+h(y)=0 \tag{3}$$

描写的二阶非线性系统. 方程 (3) 是如图 7.1-2 所示的力学系统的微分方程.

现在提出如下问题: 在什么条件下这个系统的运动是稳定的? 让我们从研究此系统的能量开始. 设想运动的总能量 V 是动能(KE)加位能(PE), 且常是正数(如果在平衡点的位能规定为零, 这是正确的). 今若总能量对时间的变化率是负的(总能量常在减少), 则运动是稳定的, 因为系统最终将走向静止. 而且如果能量对时间的变化率是零, 运动将不会无限增长, 在此情况我们也说运动是稳定的. 在数学上, 总能量是

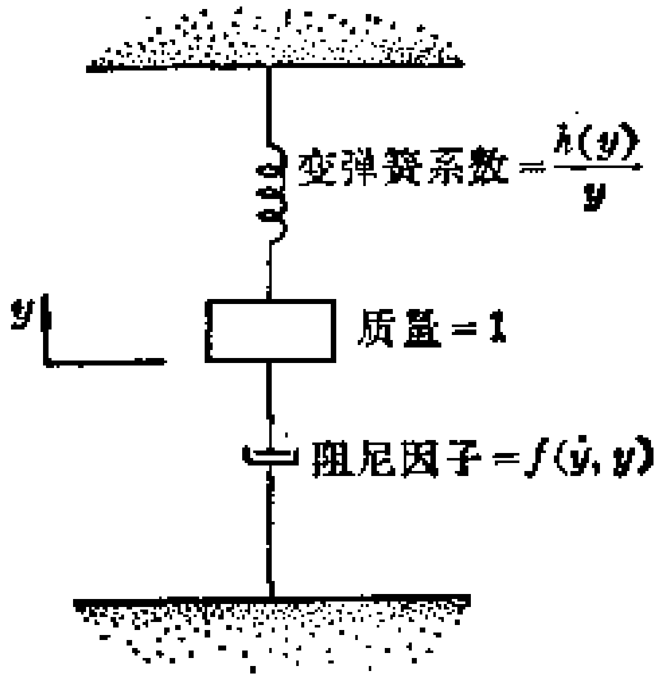


图 7.1-2 非线性质量-弹簧力学系统

$$V=KE+PE=\frac{1}{2}\dot{y}^2+\int_0^y h(\xi)\,d\xi \tag{4}$$

又 V 对时间的变化率为

$$\dot{V}=\dot{y}\ddot{y}+\dot{y}h(y)$$

从方程(3)把 $\ddot{y}$ 代入, 得到

$$\dot{V}=\dot{y}[-f(\dot{y}, y)\dot{y}-h(y)+h(y)] \tag{5}$$

或

$$\dot{V}=-f(\dot{y}, y)\dot{y}^2$$

为了使系统是稳定的, 只要能量是正的; 即

(I) $V>0$, 即 $\int_0^y h(\xi)\,d\xi>0$

及能量对时间的变化率是负的或零:

(II) $\dot{V}\leqslant 0$, 即 $f(\dot{y}, y)\geqslant 0$

条件(I)指出弹性力必须总是指向平衡点($y=\dot{y}=0$), 条件(II) 指出阻尼力总是与运动反向或者为零.

在上面的例子中, 我们找到稳定性的充分条件. 得到的结果正如直观上所预期的. 由此例子我们看到两个基本结果:

1. 论述了一个十分普遍的问题. 项 $h(y)$ 和 $f(\dot{y}, y)$ 能表示十分广泛的一类非线性系统.

2. 系统的稳定性由微分方程的结构所断定，而不必求解微分方程。

在此例中我们试图说明或建立的是直观的或物理的稳定性概念。李雅普诺夫第二方法或直接方法可以认为是能量概念的推广。

稳定性的原始问题起源于古典力学的初期。在下节中我们插入一段简略地介绍这个问题的历史梗概。愿意连续地作分析讨论的读者可进行 § 7.3，而不失连贯性。

7.2. 历史梗概

运动稳定性的分析研究是一个古老的问题。牛顿（1642—1727）提出他的太阳系运动的数学模型时就遇着这个问题。虽然牛顿已经在 1665 年和 1666 年鼠疫年代，他二十三岁的时候想出他的万有引力理论的基本原理，但他一直没有发表，直到 1686 年，即二十年之后才见于他的"原理"第一卷中。在这一卷中考察了在自由空间中质点或物体在已知轨道或已知力的作用下的运动，特别是计算了干扰力如何影响的问题。推迟发表的原因只是一种推测。三种最流行的推测似乎是如下：

1. 因为牛顿是实验主义者，他自然试图把他的引力理论与月球轨道的计算联系起来。如果用1666年所知道的地球直径和到月球的距离的数值去计算月球落向地球每秒所走的距离，将出现百分之十二左右的误差。大约牛顿认为这个误差太大了。地球的直径和到月球的距离更精确地确定正是在"原理"发表之前。这个新的数值缩减观察误差近于百分之三。

2. 可能使牛顿烦恼的第二个问题是地球和月球等的有限的大小。在1666年牛顿还不知道把地球内每一个质点对月球的引力可以加起来去决定总的引力。在1685年牛顿通过微

积分的发明发现，当一个球内任一点的密度只依赖于此点到球心的距离时，那么这个球对外界一点的引力好像是整个质量集中在它的中心时所产生的.

3. 因为在"原理"中牛顿关于其它天体对月球运动的干扰影响已有了一些想法，也许他已经关心到运动的稳定性. 在二体情况，牛顿详细地阐述了由运动的微分方程可以得到精确的封闭形式的解. 这个解不包含永年项（当时间增大时是无限的），所以是稳定的. 然而三体或多体问题就没有精确的封闭形式的解，所以不能直接决定稳定性. 正规的方法是用扰动方法处理第三个物体的影响. 一阶扰动是否是充分的或二阶、三阶等项是否必须包括在内的问题并没有解决. 这时扰动方法还未发展到能作出这些结论.

考察整个太阳系时，力是那样多，在位置上那么变更不定，在强度上又那么不同，牛顿提出他的系统的数学模型的稳定性问题. 事实上，牛顿和欧拉(1707—1783)二人都认为必有一个强有力的手经常介入来修正由于所有物体互相作用引起的干扰. 月球、木星和土星的明显的不稳定运动曾由欧拉和拉格朗日(1736—1813)研究过. 实验数据揭示了月球和木星的平均运动的稳态加速度的存在性，而在土星的平均运动中有一个同样离奇的减少. 看来仿佛土星最终要离开太阳系，木星要落入太阳中，月球要落在地球上. 在1784年拉普拉斯(1749—1827) 证明了所观察到的土星与木星的永年运动只是周期运动短暂的一段，其周期大约是850年. 这个结果的得出是考虑了两个行星相互作用所引起的相应的偏心率的三阶扰动. 在1787年拉普拉斯解决了月球的明显的不稳定运动问题. 他能够证明月球加速度依赖于地球轨道偏心率的变化. 这就消除了关于太阳系的稳定性的一切怀疑. 用来解释太阳系中的一切运动的万有引力定律的普遍正确性似乎是被确认了. 到那时

拉普拉斯认为他已经利用牛顿的万有引力定律证明了太阳系是稳定的，并且在这种意义下感到没有必要诉诸上帝．最后发现太阳系是一个完整的机构．解释太阳系稳定性应归功于拉格朗日和拉普拉斯二人．拉普拉斯二十四岁(1773年)时证明了，如果只考虑轨道偏心率的一阶和二阶干扰，两个行星相互运动是稳定的，在1776年拉格朗日证明了对任何阶的干扰运动是稳定的．所以可以说拉格朗日和拉普拉斯是“运动稳定性”的奠基者，因为他们提出这个问题的具体解法．牛顿只是第一个认识到稳定性问题的人．

拉格朗日辉煌的贡献是提出一个重大的而不同于牛顿、欧拉和拉普拉斯的方法．这些人的注意力只向着运动方程的求解．当一个微分方程的解已经找到时，可考察此解是否对全部时间是有界的．美中不足之处是：绝大部分的解是很难以求出的，即使它们是完全可以求出的．拉格朗日提出的想法是运动稳定性好多能够由微分方程的结构来决定，因此求解的必然性就消失了．特别是他证明了如果运动的总能量是个常数，则在最大位能邻近的运动是不稳定的，反之在最小位能邻近的运动是稳定的．

在大约一百年时期里稳定性问题的研究处于停滞状态．在1868年马克斯韦尔发表了论文“关于控制器”．他对几个普通的蒸气机控制器用运动方程的线性化方法论述了稳定性问题，而且注意到在这种情况下对应的特征值有负实部．在1877年罗兹发表了关于线性定常微分方程稳定性的论文．他证明了决定系统的稳定性只需要考察导数的系数而不必求出解来．霍尔维茨重新发现了罗兹的稳定性条件并发表于1895年．庞加莱(1854—1912)发展了有关稳定性的拉格朗日的能量概念．庞加莱应用了从拉格朗日时代以来的若干新的数学概念研究天体力学．在前几章里介绍的状态空间概念、几何学和记号使得由李雅普诺夫所发展的一般稳定性问题的形成奠定了数学基础．

一直到高斯(1777-1855)的时代，数学家们很少把注意力放在数学的严格基础上．在“算术的研究”中高斯对数论作了严格探讨．从此以后在数学中风行一时的是检查和建立早期工作的严格基础．由于这些实践，经常出现推广到一般化的问题．俄国人李雅普诺夫(1857—1918)的情况就是这样的．在1893年发表了名为“运动稳定性的一般问题”的李雅普诺夫的博士论文[Lyapunov, 1893]．稳定性问题表述为一个一般的问题，同时也给出了严格的证明．以前庞加莱曾提出稳定性问题的严格解法，但是缺乏李雅普诺夫的一般特征．

稳定性问题再次停滞下来．显然既没有别的数学家在李雅普诺夫的发现上努力，也没有物理学家和工程师做过这种努力．后来当工程领域开始扩展到动态系统的设计，如飞机、电子设备及自控系统，又遇到了稳定性问题．早在1922年美国人米诺尔斯基发表了一篇关于自动控制船体的稳定性在航海上应用的论文．后来在1932年，尼奎斯特发表了论文“再生理论”，其中提出了线性反馈系统的精确的稳定性条件．这些论文标志着在西方世界对反馈稳定性问题开始正式重视了．

由于尼奎斯特稳定性准则是针对线性反馈系统的，它们的使用受到一些限制．在1929年，苏联马尔金应用既可用于非线性系统也可用于线性系统的李雅普诺夫稳定性定理着手于稳定性问题的研究．从此以后，在苏联利用李雅普诺夫第二方法或直接方法去分析和设计反馈控制系统做出了大量的成果．

7.3. 李雅普诺夫稳定性概念

我们从考察微分方程

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)\end{aligned} \quad (1)$$

表示的系统开始李雅普诺夫稳定性的研究. 控制矢量 $\bar{\mathbf{u}}$ 是假设施行于时间区间(t_0, t_f)上的. 假设方程(1)满足李卜希兹条件，因而由定理 5.3-1 保证有唯一解 $\mathbf{x}(t)$.

界限或边界是李雅普诺夫稳定性研究中的基本概念. 特别是如果扰动 $\mathbf{x}(t_0)-\mathbf{x}_r(t_0)$以及受扰运动$\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}_r(t)$在一特定的作用时间内可以求得令人满意的或合适的边界，则方程(1)就称为是稳定的. 根据边界来探讨稳定性问题，可得到重大的好处：不必求解微分方程就可断定稳定性. 需要研究的只是微分方程的结构.

李雅普诺夫稳定性是由考察参考轨线 $\mathbf{x}_r(t)$附近的受扰轨线 $\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}_r(t)$来定义的(参看 § 6.4 和 § 6.5). 只有在 $\mathbf{x}_r(t_0)$ 微小改变所引起的扰动是容许的. 这个扰动表示为 $\mathbf{x}(t_0)-\mathbf{x}_r(t_0)$. 控制矢量 $\mathbf{u}$ 作用于受扰动运动和未受扰动运动二者. 典型的受扰动轨线与参考轨线如图 7.3-1 所示. 现在给出稳定性的两个定义，它们是定义 6.6-1 的一般化.

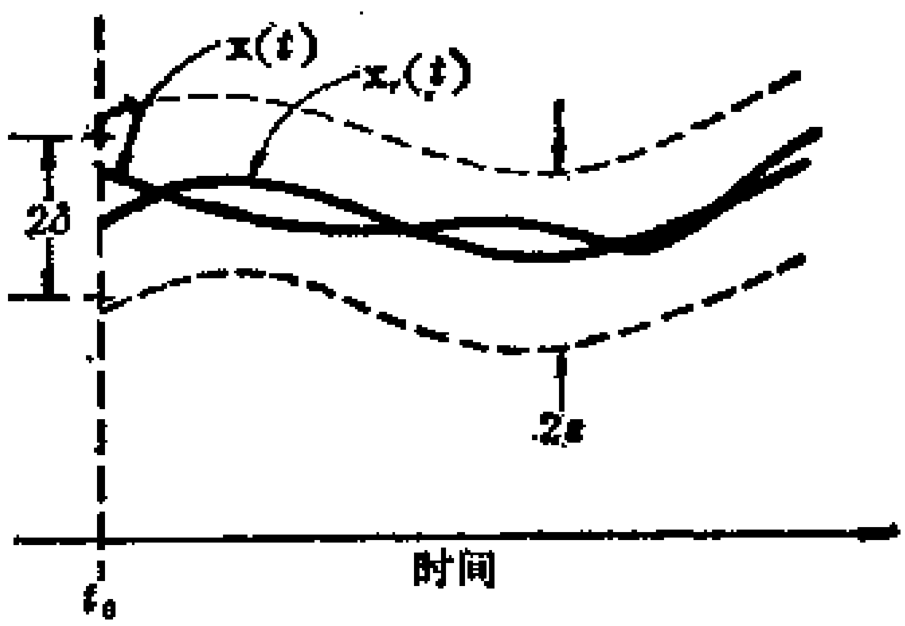


图 7.3-1 李雅普诺夫稳定性的图解

定义7.3-1 考察对应于受扰初始条件 $\mathbf{x}(t_0)-\mathbf{x}_r(t_0)$的受扰动运动 $\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}_r(t)$. 参考轨线 $\mathbf{x}_r(t)$在李雅普诺夫意义下是稳定的，如果对于任何 $\varepsilon>0$ 存在$\delta>0$，使得当

$$\|\mathbf{x}(t_0)-\mathbf{x}_r(t_0)\|\leqslant\delta$$

时有

$$\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}_r(t)\|<\varepsilon \quad 对一切\ t>t_0$$

定义7.3-2 参考轨线$\mathbf{x}_r(t)$在李雅普诺夫意义下是渐近稳定的，如果它是稳定的且

$$\lim_{t\to\infty}\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}_r(t)\|=0$$

图 7.3-1 说明在李雅普诺夫意义下稳定性的定义．区间2δ表示受扰初始条件的边界，区间 2ε 表示受扰运动的边界．要注意的是这些定义并未限制在有限时间区间内．

7.4. 自治系统的稳定性

为了研究稳定性，我们在状态空间内考察方程（7.3-1）的运动．为使讨论尽可能简单，我们将考虑由方程

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{1}$$

表示的自治系统，并且集中注意力于平衡点 $\mathbf{x}_e$ 的邻域R内微小受扰运动．回想 $\mathbf{x}_e$ 是方程(1)的平凡解，并且起到§7.3的定义中参考轨线 $\mathbf{x}_r$ 的作用．其次，如§6.4所讨论的 $\mathbf{x}_e$ 常可取作原点而不失一般性．下列两个定义是§7.3 中定义的特殊情况．

定义7.4-1 对于方程(1)的自治系统，原点 $\mathbf{x}_e=\mathbf{0}$ 是稳定的，如果对任何 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta>0$ 使得当

$$\|\mathbf{x}_0\|<\delta$$

有

$$\|\mathbf{x}\|<\varepsilon \quad 对于\ t>t_0$$

定义7.4-2 原点 $\mathbf{x}_e=\mathbf{0}$ 是渐近稳定的，如果它是稳定的，且

$$\lim_{t\to\infty}\|\mathbf{x}(t)\|=0$$

因为 ε 可以是任意小的，这些定义只适用于在原点附近微小受扰运动．图 7.4-1a 用图形说明了定义 7.4-1 的想法．图 7.4-

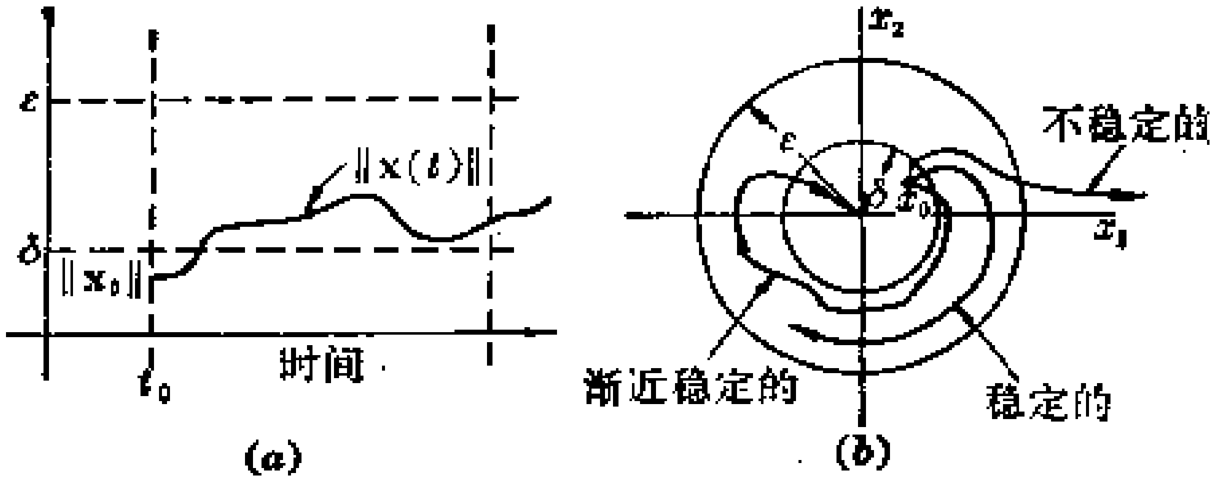


图 7.4-1 稳定性概念

1b在相平面上图示稳定性的几何概念. 半径 δ 的圆包围初始矢量 $\mathbf{x}_0$, 半径 ε 的圆确定了受扰运动 $\mathbf{x}(t)$ 的边界. 如果当 t 趋于无限时, 运动趋于原点, 系统是渐近稳定的. 让我们考察下列例子.

例 7.4-1 考察一阶系统 $\dot{x}=\frac{1}{10}x$, 它的运动为

$$x(t)=x_0e^{(t-t_0)/10}$$

设有兴趣的时间区间是 $t_f-t_0=10$ 秒. 再设 $|x|$ 的最大允许值是 100. 在实用意义下, 对满足

$$|x_0|\leqslant 100e^{-1}$$

的初始条件, 系统是稳定的. 然而当 $t\to\infty$, 运动变成无界, 因此在李雅普诺夫意义下是不稳定的.

到此为止我们的稳定性定义只应用于微小受扰运动或局部运动. 通常"大范围"运动也是有兴趣的. 关于大范围运动, 一般要问: 对应于任何初态 $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$, 无论多大, 方程(1)的任一解 $\mathbf{x}(t)$ 返回到原点吗? 关于大范围运动, 给出下列定义.

定义7.4-3 自治系统 $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 是大范围渐近稳定的, 如果它是稳定的, 且

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{x}(t)=0 \quad 对任何\ \mathbf{x}_0$$

定义 7.4-3 给出的稳定性定义也称为全局渐近稳定性或完全稳定性. 定义 7.4-3 是一个强的稳定条件, 因为它意味着原点是系统的唯一平衡点. 所有的轨线都收缩于原点. 一个较少限制的

定义是拉格朗日稳定性，给出如下：

定义7.4-4 自治系统 $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 是拉格朗日稳定的，如果所有的解 $\mathbf{x}(t)$ 当 t 增大时保持有界．这对任何初态必须成立．

拉格朗日稳定性允许有一稳定的极限环，它包围着任意个数的稳定和不稳定的平衡点．下例说明稳定性的一些概念．

例 7.4-2 在表 7.4-1 给出的微分方程中，状态变量是 $x_1=y$ 及 $x_2=\dot{y}$．每个系统只有一个在原点的平衡点．每个系统的运动相图画在图 7.4-2 中．

表 7.4-1

系　　统	注　　解	稳 定 性
$\ddot{y}+y=0$	调和振子；参看图7.4-2a．	原点是稳定的，但系统不是渐近稳定的．
$\ddot{y}+\dot{y}+y=0$	参看图 7.4-2b．	大范围渐近稳定的．
$\ddot{y}-(1-y^2)\dot{y}+y=0$	范德坡方程；参看图 7.4-2c	拉格朗日稳定的；原点是不稳定的．

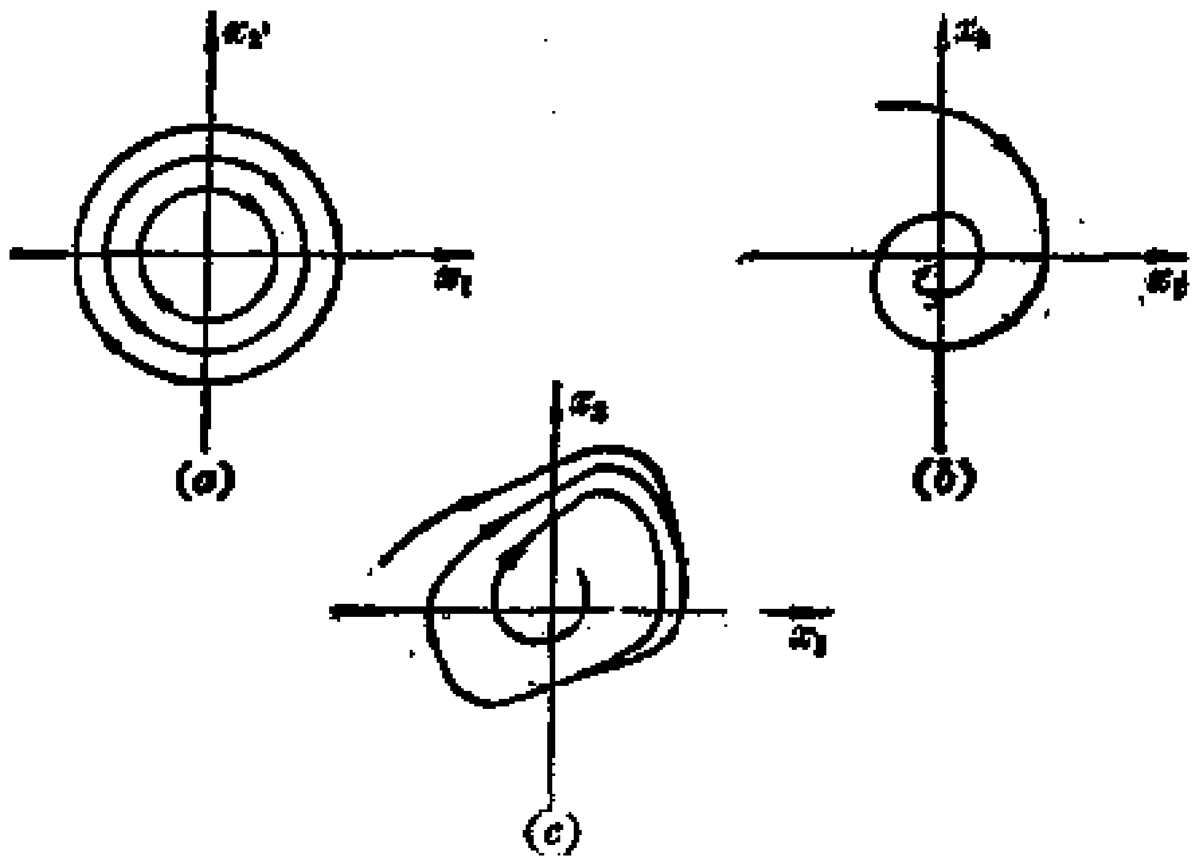


图 7.4-2 各种稳定性定义的例子

在正式提出李雅普诺夫的直接方法或第二方法之前，此时定义李雅普诺夫函数是适当的．我们在下节就做这件事．

7.5. 李雅普诺夫函数

如在例 7.1-2 所讨论的，直观上很显然，如果在平衡点附近系统的能量对时间的变化率是零或负的，则系统是稳定的．在这个例子中我们定义了正的标量函数 V，它对时间的变化率为零或为负．这个函数使我们能决定稳定的条件．李雅普诺夫的稳定性理论是能量概念的推广．在自治系统

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{f}(\mathbf{0})=\mathbf{0} \tag{1}$$

的研究中，其想法是用所谓李雅普诺夫函数 $V(\mathbf{x})$ 来确定稳定性．如在例 7.1-2 的讨论中所提到的，确定稳定性不必求解微分方程．

为了看出李雅普诺夫函数是怎样与系统方程联系的，设 $V(\mathbf{x})$ 是李雅普诺夫函数(定义7.5-1)．对时间微分 $V(\mathbf{x})$ 得到

$$\dot{V}(\mathbf{x})=\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} \tag{2}$$

把方程(1)的 $\dot{\mathbf{x}}$ 代入，求得

$$\dot{V}(\mathbf{x})=\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{3}$$

我们将在本章的下面几节中研究判断稳定性的问题．现在的目标是定义李雅普诺夫函数及说明它的几何性质．李雅普诺夫函数正式定义如下：

定义 7.5-1 李雅普诺夫函数 $V(\mathbf{x})$ 有下列性质：

(i) $V(\mathbf{x})$ 是一个矢性变元的标量函数．

(ii) $V(\mathbf{x})$ 是连续的，又梯度 $\dfrac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}$ 定义在包围原点的区域 R 内．

(iii) $V(\mathbf{x})$ 在 R 内是正定的．

(iV) $\dot{V}(\mathbf{x})\leqslant 0$ 对 $t\geqslant t_0$．

让我们明确地回顾一下正定函数是什么意思．我们正式做出下列定义．

定义 7.5-2 考虑定义在原点的某个区域 R 内的函数 $V(\mathbf{x})$。若

(i) 在 R 内 $V(\mathbf{x})$ 是连续可微的.

(ii) $V(\mathbf{0})=0$.

(iii) $V(\mathbf{x})>0$, 对包含在 R 内的 $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$.

则称 $V(\mathbf{x})$ 在 R 内是正定的.

定义 7.5-2 立即导致 $V(\mathbf{x})$ 必须满足的一些一般的性质. 如果把 $V(\mathbf{x})$ 在原点附近展成泰勒级数, 即

$$V(\mathbf{x})=a_0+\boldsymbol{a}_1^T\mathbf{x}+\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}+\cdots \tag{4}$$

则可得出下列结果

1. $a_0=0$, 因 $V(\mathbf{0})=0$.
2. $\boldsymbol{a}_1=\mathbf{0}$, 因 $\boldsymbol{a}_1^T\mathbf{x}$ 对任意 $\mathbf{x}$ 可能取负值.
3. $\mathbf{A}$ 必须是正定的.

一般说来, $V(\mathbf{x})$ 可以包含二次及高次项. 下面是一些正定函数的例子:

$Q=ax_1^2+bx_2^2$ $\qquad a>0,\ b>0$, 对一切 x_1 及 x_2

$Q=x_1^2+ax_1x_2+bx_2^2$ $\qquad b>\dfrac{a^2}{4}$ 对一切 x_1 及 x_2

$Q=6x_1^2+12x_2^2+4x_1x_2^4+x_2^8=2x_1^2+12x_2^2+(2x_1+x_2^4)^2$

对一切 x_1 及 x_2

$Q=x^2+x^3$ $\qquad |x|<1$

下面是非正定函数的例子:

$$\begin{aligned}
&Q=ax_1^2-bx_2^2 && a>0,\ b>0\\
&Q=x_1^2+ax_1x_2+bx_2^2 && b<\frac{a^2}{4}\\
&Q=(x_1+x_2)^2
\end{aligned} \tag{5}$$

虽然(5)的最后一式决不会是负的, 但当 $x_1=-x_2$ 时它等于零.

现在研究$V(\mathbf{x})$的一些几何性质，它们将有助于以后的讨论。考察一维函数$V(\mathbf{x})=ax^2$. 这个函数(抛物线)画在图7.5-1a中，它的性质是显然的. 今考察函数$V(\mathbf{x})=ax_1^2+bx_2^2$，这里$a$和$b$是正的，在原点函数是零，且当$\mathbf{x}\neq 0$时是增加的. 这个函数形成一个杯子或盆子，如图7.5-1b所示. 显然这些几何性质可推广到n维

考察图7.5-1b中函数的等高线. 等高线由方程

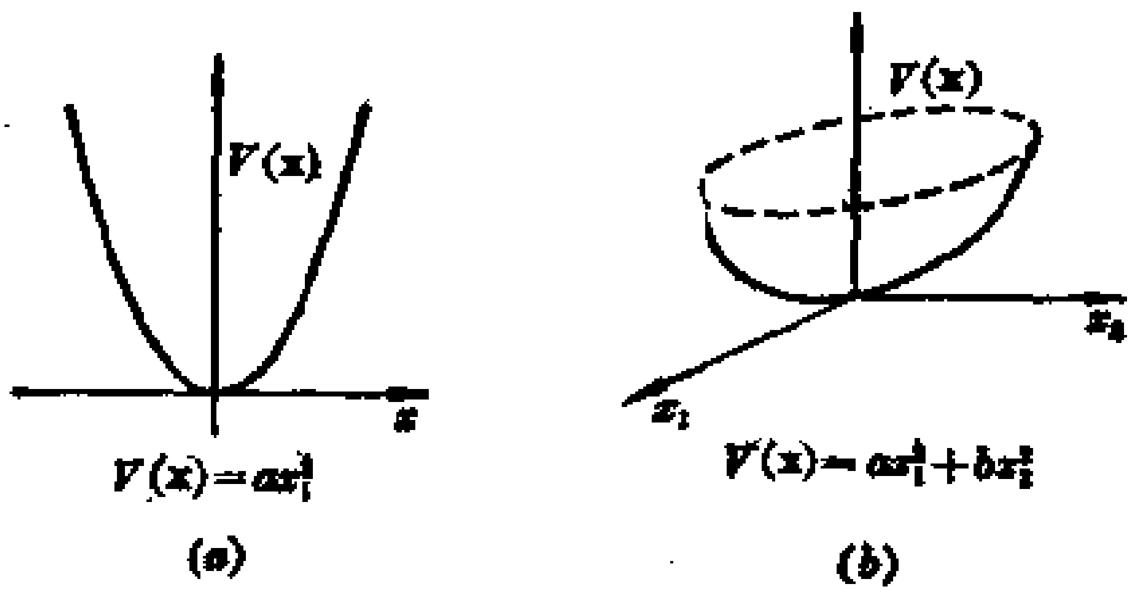


图 7.5-1　正定函数

$$ax_1^2+bx_2^2=k$$

得出. 若$k>0$，等高线是椭圆，画在x_1x_2平面上如图7.5-2所示. 一般说来，李雅普诺夫函数的等高线必定是在R内围绕原点的闭周线或闭超壳. 如图7.5-2所示，对应于$k_1<k_2$的等高线必包含

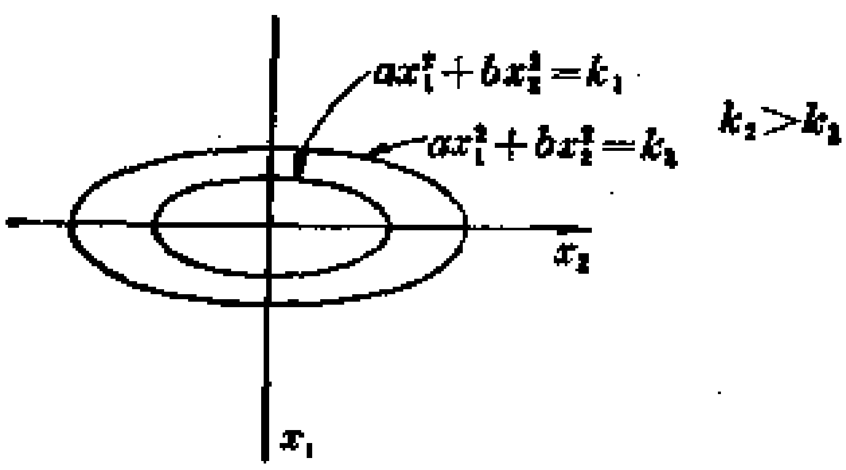


图 7.5-2　$V(x)=ax_1^2+bx_2^2$的等高线

在用k_2表示的等高线之内. 在下节中我们将借助这些几何性质来阐述下面的李雅普诺夫稳定性定理的直观思想.

7.6. 李雅普诺夫稳定性定理

现在给出关于稳定性的三个定理. 我们不想去证明它们. 对证明有兴趣的读者可参考卡尔曼与裴特拉姆[1960]及拉赛尔与莱夫西斯[1961]; 但是将讨论诸定理的几何学, 藉以建立李雅普诺夫稳定性的直观概念. 我们只考虑自由自治系统. 先从如下定理开始.

定理 7.6-1 (李雅普诺夫第一稳定性定理)如果在原点的某个微小区域 R 内, 自由自治系统 $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 存在李雅普诺夫函数 $V(\mathbf{x})$, 则运动在 R 内是稳定的.

定理 7.6-2 (李雅普诺夫第二稳定性定理) 如果定理 7.6-1 的条件成立, 且 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 在 R 内是负定的, 则运动是渐近稳定的.

为了解释这些定理, 设想对方程(7.5-1)的系统存在李雅普诺夫函数 $V(\mathbf{x})$. 那么根据定理 7.6-1, 系统是稳定的. 让我们研究它的几何含义. 根据定义7.4-1, 原点是稳定的, 如果运动 $\mathbf{x}(t)$ 对于起始于球域 $S(\delta)=\|\mathbf{x}_0\|<\delta$ 的某个 $\mathbf{x}_0$ 仍停留在球域 $S(\varepsilon)=\|\mathbf{x}(t)\|<\varepsilon$ 之内(参看 § 2.8).

为要看出李雅普诺夫函数的存在就意味着稳定性, 设想我们已知半径为 ε 的球域 $S(\varepsilon)$, 如图 7.6-1 所作出的. 然后我们可以找到一个常数 k 使等高线 $V(\mathbf{x})=k$ 正好在 $S(\varepsilon)=\varepsilon$ 内. 也可以求得半径 δ, 使球域 $S(\delta)$ 正好在等高线 $V(\mathbf{x})=k$ 之内.

现在考察任一轨线 $\mathbf{x}(t)$, 它的初态 $\mathbf{x}_0$ 是在如图 7.6-1 所示的球域 $S(\delta)$ 内. 于是有 $V(\mathbf{x}_0)<k$, 并且 V 在轨线上取值是非增加的; 即

$$V[\mathbf{x}(t)]>0$$

及

$$\dot{V}[\mathbf{x}(t)]\leqslant 0 \tag{1}$$

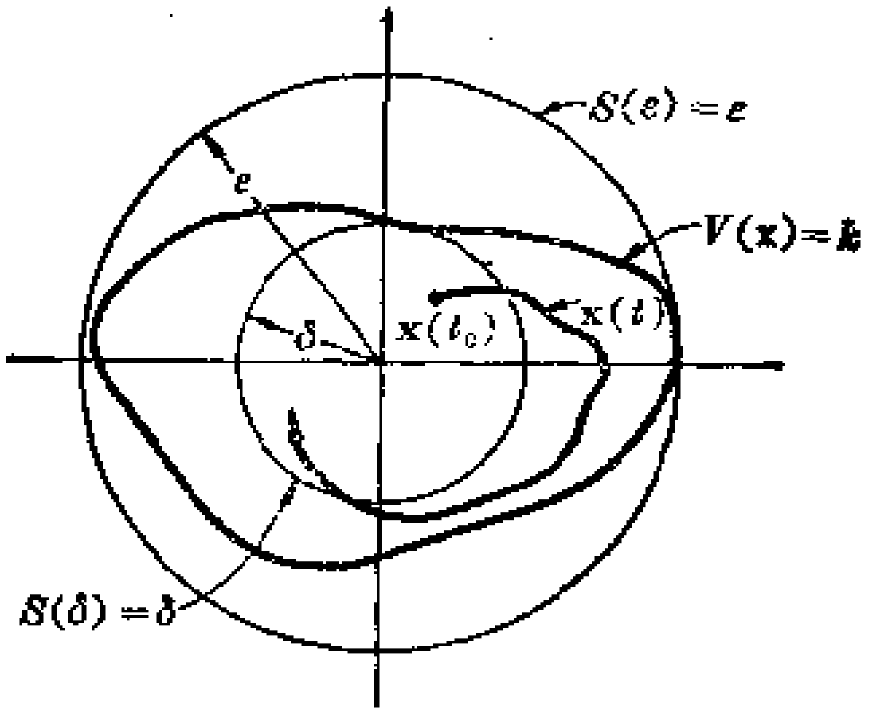


图 7.6-1 李雅普诺夫稳定性的几何解释

因为 $V[\mathbf{x}(t)]$ 是非增的，我们断定运动 $\mathbf{x}(t)$ 永远不能达到球的边界 $S(\varepsilon)$. 换言之当初态 $\mathbf{x}_0$ 开始于球域 $S(\delta)$ 内时，亦即当 $\mathbf{x}_0$ 满足条件

$$\|\mathbf{x}_0\|=S(\delta)<\delta$$

时运动满足条件

$$\|\mathbf{x}(t)\|<S(\varepsilon)<\varepsilon \tag{2}$$

换言之，我们证明了运动 $\mathbf{x}(t)$ 如果开始于 $S(\delta)$ 内将停留在 $S(\varepsilon)$ 中. 这就是稳定的.

正如我们看到的，等高线 $V(\mathbf{x})=k$ 确定了运动 $\mathbf{x}(t)$ 的一个边界. 这个边界在时间上是常数. 对渐近稳定性我们能构造一个边界，使它随时间而渐近地走向零. 为了证明这点，对 $V(\mathbf{x})\neq 0$ 考察关系式

$$\dot{V}(\mathbf{x})=\frac{\dot{V}(\mathbf{x})}{V(\mathbf{x})}V(\mathbf{x}) \tag{3}$$

设 η 是 $-\dfrac{\dot{V}(\mathbf{x})}{V(\mathbf{x})}$ 的最小值，则由(3)式

$$\dot{V}(\mathbf{x})\leqslant-\eta V(\mathbf{x}) \tag{4}$$

注意到 $\eta>0$，因为 V 是正定的，而 $\dot{V}$ 是负定的. 不等式(4)的解是

$$\dot{V}(t;\mathbf{x})\leqslant e^{-\eta(t-t_0)}V(t_0;\mathbf{x}_0) \tag{5}$$

函数 $V(t;\mathbf{x})$确定了运动 $\mathbf{x}(t)$的边界，如图 7.6-2 所示．不等式(5)也给出了瞬变性态的估计．事实上，η^{-1} 可以解释为系统的最大时间常数，且可用于估计响应的最大时间[Kalman和 Bertram，1960]．

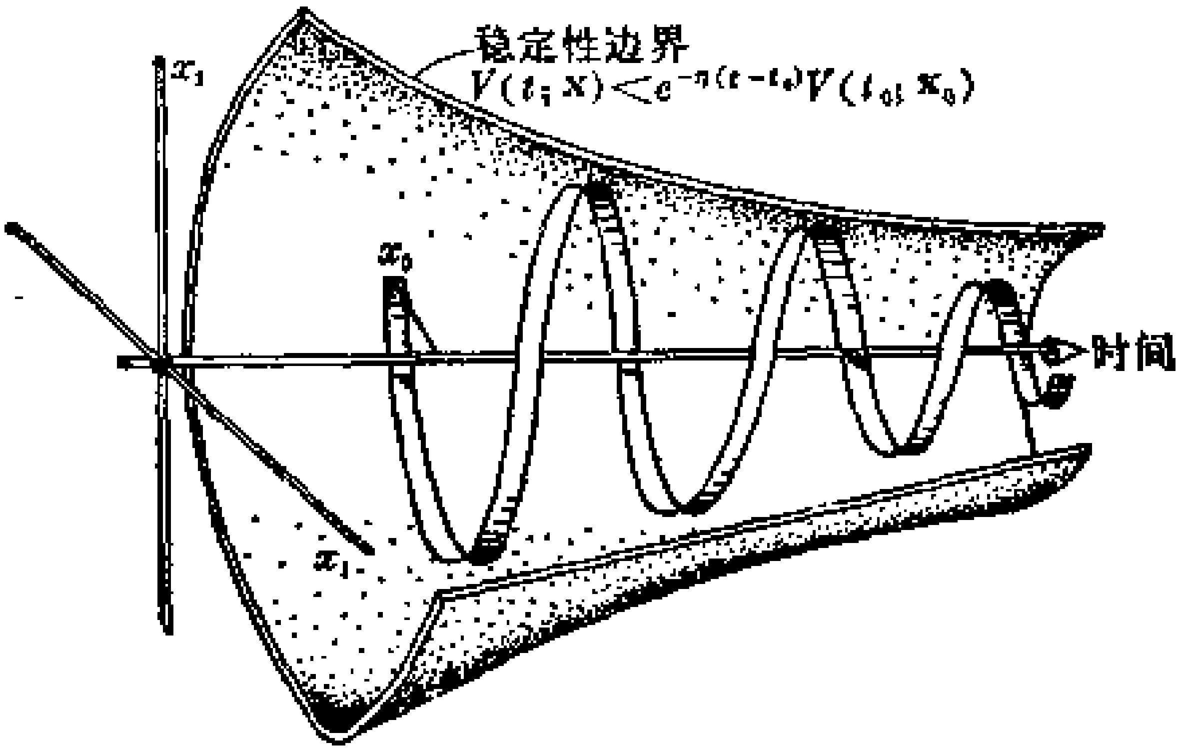


图 7.6-2　渐近稳定性的一个说明

如果对一切$\mathbf{x}(t)$，$\dot{V}[\mathbf{x}(t)]$是正的，则在原点附近的微小运动是"不稳定的"，因为 $V[\mathbf{x}(t)]$将增加到 k，所以 $\mathbf{x}(t)$将达到边界 $V(x)=k$．这个性质形成了下列定理．

定理 7.6-3　（李雅普诺夫第一不稳定性定理）如果在原点的某个微小区域内，存在正定函数 $W(\mathbf{x})$，使 $\dot{W}(\mathbf{x})$为正的，则微小运动是不稳定的．

李雅普诺夫稳定性定理，在做必要的改变之后，也能很好地应用于时变自由系统．微分方程是

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x},t) \tag{6}$$

平衡条件是

$$\mathbf{f}(0,t)=0 \tag{7}$$

李雅普诺夫函数可写作时间的显函数，即 $V(\mathbf{x},t)$，导数也是一

样:

$$\dot{V}(\mathbf{x}, t)=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} \tag{8}$$

这个内容由卡尔曼与裴特拉姆[1960]及拉赛尔与莱夫西斯[1961]作过详细讨论. 这里不去深究了.

李雅普诺夫函数不是唯一的;可能存在多个李雅普诺夫函数,其中任何一个都可用来建立系统的稳定性. 因此李雅普诺夫函数只是给出稳定性的充分条件. 多个李雅普诺夫函数中的每一个都可提供关于系统的不同的信息,这正如在下节所说明的.

7.7. 稳定性的区域

至今我们限于讨论在原点周围微小运动的稳定性. 如果所考虑的只是非线性系统的微小运动,最好的办法是在原点处把这个系统线性化,并且使用在§6.6所讨论的高度发展了的线性方法或其它方法如根轨迹法和尼奎斯特方法[D'Azzo和Houpis, 1966]. 李雅普诺夫第二方法的优点在于能够处理非线性系统和(或)时变系统的大范围运动. 如上所述,问题是求出一个封闭区域,在其中V是正的而$\dot{V}$是非正的. 我们假设李雅普诺夫函数在这个区域内处处存在. 自然,我们关心的是区域能大到我们所希望的程度. 在这一节里我们要研究几个区域及相关的边界.

对于一个已给的李雅普诺夫函数可以找到许多的边界及其相关的区域. 我们现在叙述一种方法,利用它可以求出对应于一个已给李雅普诺夫函数的大区域的边界. 为了使讨论简单,我们仍然考察自治系统. 因为$\dot{V}$必定是非正的,我们研究条件[参看关系式(7.5-2)]

$$\dot{V}=\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}=0 \qquad \mathbf{x}\neq\mathbf{0} \tag{1}$$

方程(1)指出必有$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}$或 $\dot{\mathbf{x}}$ 为零，或二者同时是零，因为在一般情况$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}$和$\dot{\mathbf{x}}$不是正交的．条件 $\dot{\mathbf{x}}=0$ 指出 $\dot{V}$ 在平衡点可能变号．因此要研究最靠近原点的零梯度的点或平衡点．假设在这个点V的值是 k，则等高线

$$V(\mathbf{x})=k>0 \tag{2}$$

在零梯度点或平衡点取值，只要等高线包围原点，则它是稳定性边界．

为了说明这个想法，考察系统

$$\ddot{y}+b\dot{y}+h(y)=0 \quad b\geqslant 0,\ h(y)=y-y^2 \tag{3}$$

写为矩阵记号，有

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\ -bx_2-x_1+x_1^2\end{bmatrix} \tag{4}$$

其中 $x_1=y$ 及 $x_2=\dot{y}$．这是例 7.1-2 所考察的问题的特殊情况．我们将对于三个不同的李雅普诺夫函数找出三个与之相应的稳定性边界．

这个系统有两个平衡点，即原点和(1,0)．根据线性分析，这个系统在原点是稳定的，而在(1,0)是不稳定的．亦即在原点，线性系统

$$\Delta\ddot{y}+b\Delta\dot{y}+\left.\frac{\partial(y-y^2)}{\partial y}\right|_{y=0}\Delta y=\Delta\ddot{y}+b\Delta\dot{y}+\Delta y=0$$

是稳定的．而在点 $x_1=1, x_2=0$，线性系统

$$\Delta\ddot{y}+b\Delta\dot{y}+\left.\frac{\partial(y-y^2)}{\partial y}\right|_{y=1}\Delta y=\Delta\ddot{y}+b\Delta\dot{y}-\Delta y=0$$

是不稳定的．

和§7.1中一样，把系统的能量取作李雅普诺夫函数，即

$$V_1=\frac{1}{2}x_2^2+\int_0^{x_1}(x-x^2)dx$$

或

$$V_1=\frac{1}{2}x_2^2+\frac{x_1^2}{2}-\frac{x_1^3}{3}$$

求得

$$\dot{V}_1=-bx_2^2$$

为了求出围绕原点的稳定性边界，考察梯度

$$\frac{\partial V_1}{\partial \mathbf{x}}=[x_1-x_1^2 \quad x_2]$$

在两个平衡点梯度矢量都为零。沿着直线 $x_2=0$ 从原点走向右边，一直到遇到平衡点(1,0)之前梯度的 x_1 的分量是正的，而在点(1,0)梯度变为零. 继续向右走，过了这个平衡点梯度是负的. 在点 $\left(\frac{3}{2},0\right)$ 李雅普诺夫函数变为零，此后是负的，如图 7.7-1 所表示的.

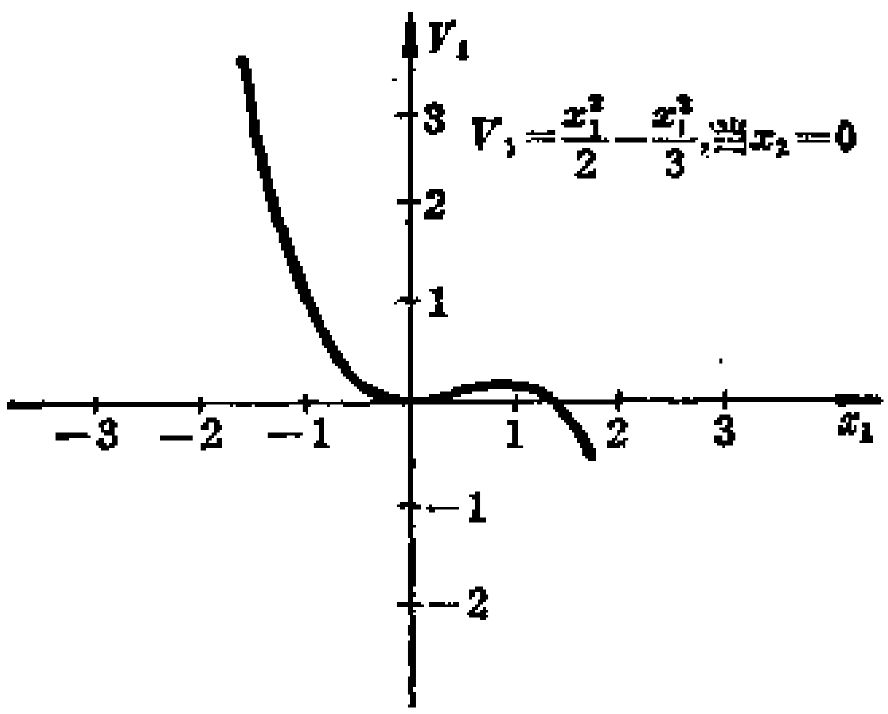


图 7.7-1　李雅普诺夫函数 $V_1=\frac{1}{2}x_2^2+\frac{x_1^2}{2}-\frac{x_1^3}{3}$ 沿 x_1 轴的剖面图

在点(1,0)，$V_1=\frac{1}{6}=k$. 令 V_1 等于从 0 到 $\frac{1}{6}$ 范围内的任一个常数，便可求出包围原点的等高线. V_1 的更大的常数值形成开边界，如图 7.7-2 所示. 因此可做出结论是：由此李雅普诺夫函数导

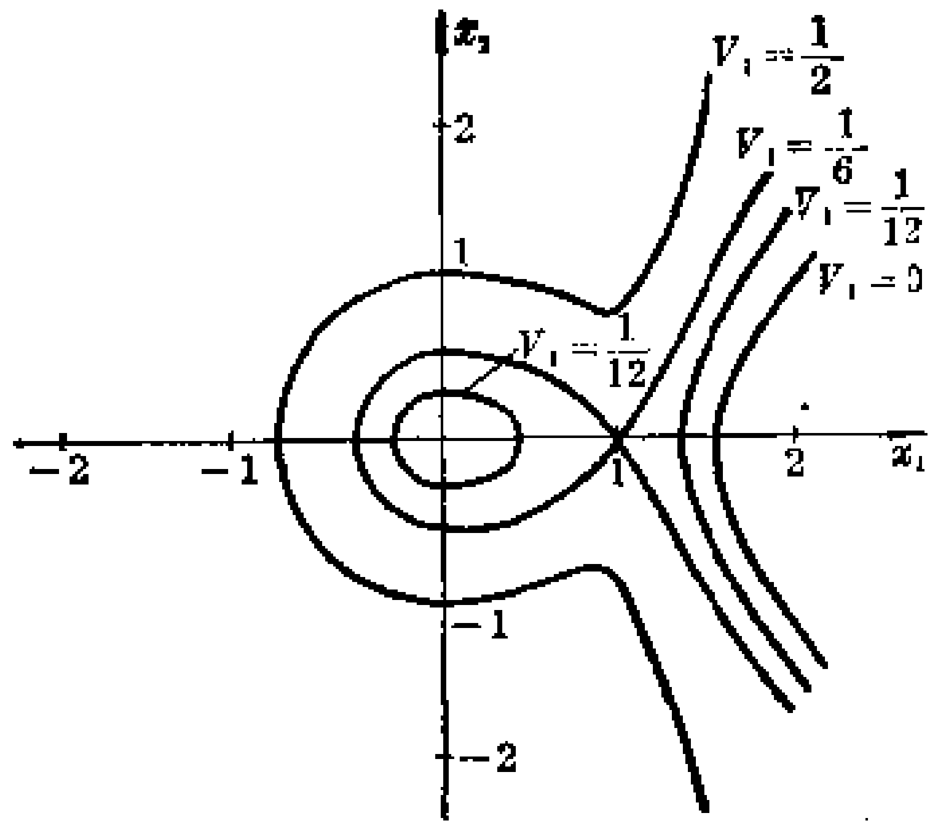


图 7.7-2 李雅普诺夫函数 $V_1=\frac{1}{2}x_2^2+\frac{x_1^2}{2}-\frac{x_1^3}{3}$ 的一些等高线.

出的最大稳定性边界是 $V_1=\frac{1}{6}$. 值得注意的是，如果 $b=0$，则 V_1 = 常数的图形等同于相图的轨线，且 $V_1=\frac{1}{6}$ 对应于最大能量轨线，它是稳定的(参看习题 6.1).

若 b 增大到某个正的有限值，稳定区域应是增大的；然而这个李雅普诺夫函数不会得出一个更大的稳定区域. 因为能量函数不包含 b，所以稳定性边界也不直接包含 b. 考察下列函数，其中 b 明显地出现：

$$V_2=\frac{1}{2}x_2^2+\frac{b}{3}x_2h(x_1)+\left(1+\frac{b^2}{3}\right)\int_0^{x_1}h(x_1)dx_1 \tag{5}$$

为了使 V_2 适合充分条件，达到 V_2 是正定的目的，把前二项配平方，又乘以再除以 $\frac{1}{2}x_2^2$，表达式(5)可写为

$$V_2=\frac{\left[\frac{1}{2}x_2^2+\frac{b}{6}x_2h(x_1)\right]^2}{\frac{1}{2}x_2^2}$$

$$+\frac{\int_0^{x_1} h(x_1)\int_0^{x_2}\left[1+\frac{b^2}{3}-\frac{b^2}{9}h'(x_1)\right]x_2 dx_2 dx_1}{\frac{1}{2}x_2^2} \tag{6}$$

其中 $h(x_1)=x_1-x_1^2$. 对时间微分 V_2 并以(4)代入得

$$\dot{V}_2=-\frac{b}{3}[3-h'(x_1)]x_2^2-\frac{b}{3}h^2(x_1) \tag{7}$$

从(6)与(7)式得稳定性的充分条件:

$$\left[1+\frac{b^2}{3}-\frac{b^2}{9}h'(x_1)\right]>0 \qquad \int_0^{x_1} h(u)du>0$$
$$3-h'(x_1)\geqslant 0 \tag{8}$$
$$b\geqslant 0$$

再者, 令 V_2 的梯度为零, 并解出相应的 x_1 和 x_2 的值便可求出大范围运动的稳定性边界. 因此

$$\frac{\partial V_2}{\partial \mathbf{x}}=\left[\frac{b}{3}x_2h'(x_1)+\left(1+\frac{b^2}{3}\right)h(x_1) \qquad x_2+\frac{b}{3}h(x_1)\right] \tag{9}$$
$$=[0 \quad 0]$$

梯度在点(1, 0)为零. V_2 在此点的值为 $V_2=\frac{1}{6}\left(1+\frac{b^2}{3}\right)$. 这个李雅普诺夫函数生成一个封闭的边界, 在其内稳定性条件被满足. 它表示对应于这个特殊的李雅普诺夫函数的最大稳定性区域. 在图 7.7-3 中画出了对 $b=4$ 的边界. 应注意 V_2 的稳定性区域增大到超过 V_1 的稳定性区域.

李雅普诺夫函数沿着稳定性边界的值不需要是常数. 只要任何闭边界存在使 V 是正的且对任何从边界到内部的运动是递减的, 以及 $\dot{V}$ 沿任何边界是非正的, 一个稳定性区域便决定了 [LaSalle, 1960]. 为了说明, 再考察方程(3), 我们选择一个由三段 W_1, W_2 和 W_3 构成的边界如下:

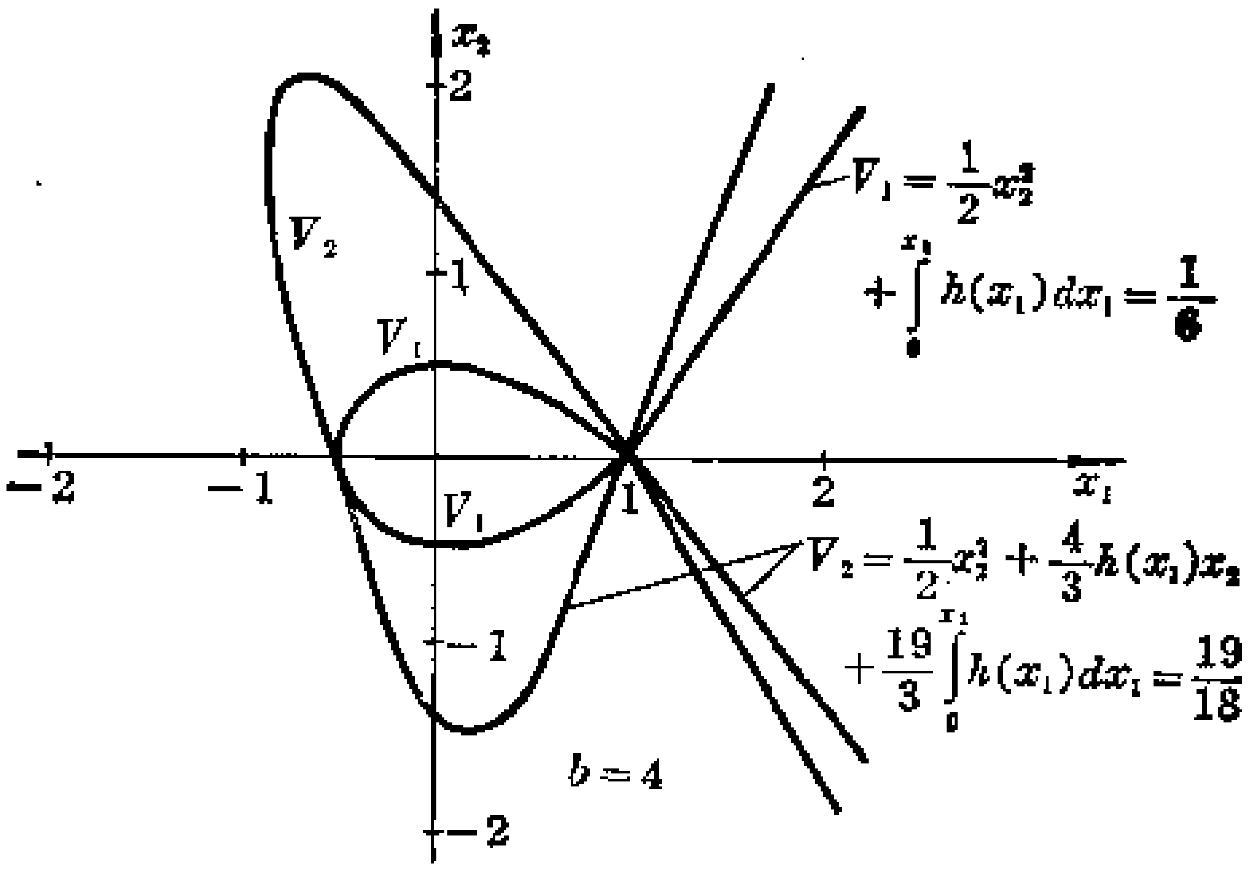


图 7.7-3 方程(7.7-3)的稳定性边界

$$W_1=\frac{1}{2}x_2^2+\int_0^{x_1}h(x_1)\,dx_1=\frac{1}{2}b^2$$

$$W_2=x_1=1$$

$$W_3=x_2+bx_1=b$$

每一段的范围如图 7.7-4 所示．在边界内沿任何轨线上 W_1、W_2 和 W_3 对时间的变化率为

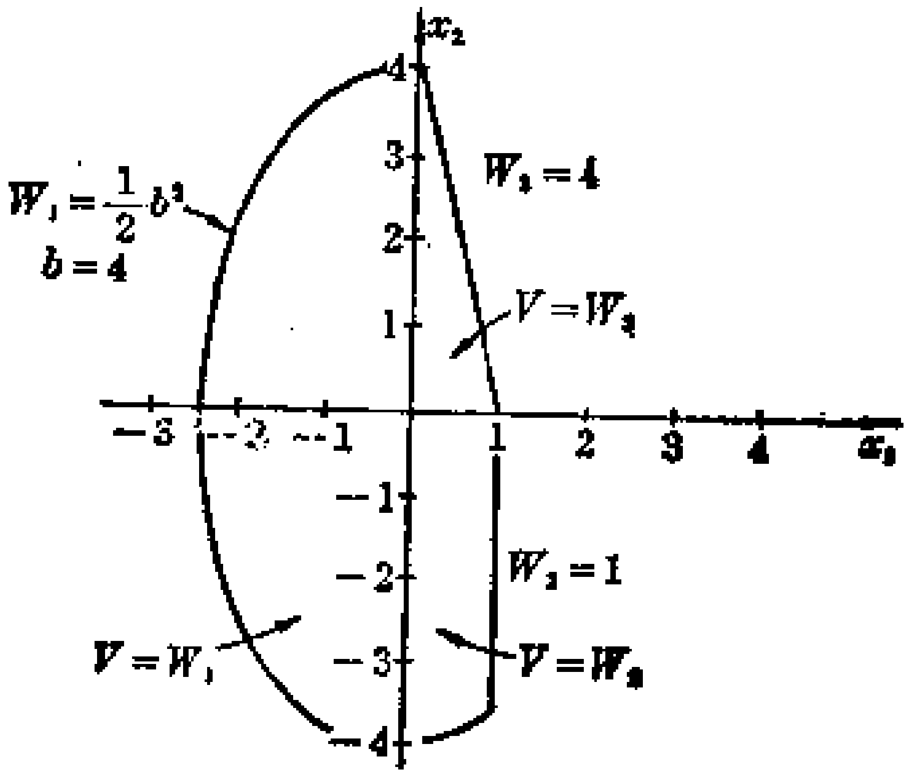


图 7.7-4

$$\dot{W}_1 = -bx_2^2$$
$$\dot{W}_2 = \dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{W}_3 = \dot{x}_2 + b\dot{x}_1 = -h(x_1)$$

这些变化率沿着边界全是非正的，如图 7.7-4 所示. 所以没有轨线从闭边界内出发能达到边界. 注意，这个稳定性边界比 V_1 和 V_2 的边界大得多.

7.8. 大范围渐近稳定性

有时，控制系统必须设计得在有任意大干扰时能良好地运行. 这个系统必须设计得使它对一切初始条件能回到平衡点. 为了处理这种类型的性能，给出如下定理.

定理 7.8-1 (**大范围渐近稳定性**)系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在原点是大范围渐近稳定的，如果存在李雅普诺夫函数使得对一切 $\mathbf{x} \neq 0$，$V(\mathbf{x}) > 0$ 及 $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$，且当 $\|\mathbf{x}\| \to \infty$ 有 $V(\mathbf{x}) \to \infty$.

直观地说，若当任何 $x_i \to \infty$ 时 $V(\mathbf{x})$ 不趋向无限，则任意大闭稳定性边界不可能求得. 作为例子，图 7.8-1 表示等高线 $V(\mathbf{x}) = c_i$. 在这种情况，假设 $\dot{V} < 0$，原点是渐近稳定的. 另一方面，大范围运动也可以走向无限如图所示. 定理 7.8-1 可由下例说明之.

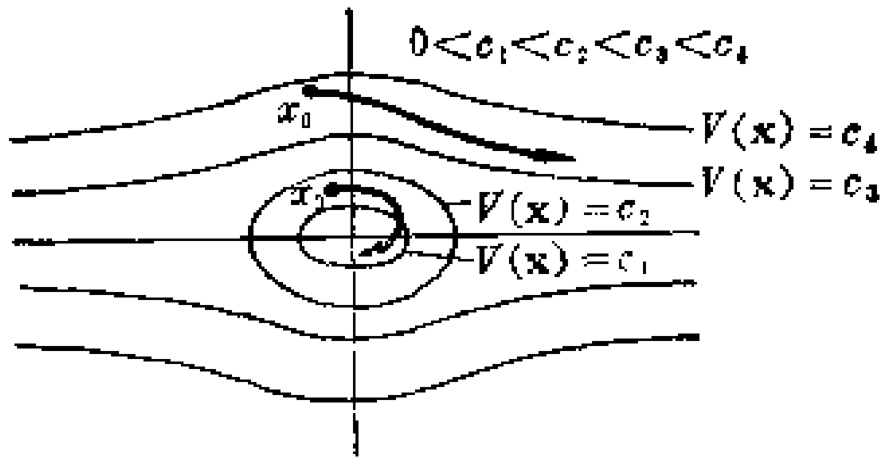


图 7.8-1 不能得出大范围渐近稳定性的李雅普诺夫函数的等高线的例子

例 7.8-1 考察方程(7.1-3)：

$$\ddot{y} + f(\dot{y}, y)\dot{y} + h(y) = 0 \quad h(0) = 0$$

表示的运动. 再一次选取李雅普诺夫函数

$$V=\frac{1}{2}\dot{y}^2+\int_0^y h(y)dy$$

由此,

$$\dot{V}=-f(\dot{y},y)\dot{y}^2$$

这个系统是大范围渐近稳定的, 如果

1. $\int_0^y h(y)dy>0$ 对一切 $y\neq0$

2. $\lim_{y\to\infty}\int_0^y h(y)dy=\infty$

3. $f(\dot{y},y)>0$ 对一切 $\dot{y}$ 及 y

如果 V 是二次型, 即

$$V=\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x} \tag{1}$$

及 $\dot{V}=\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_i}\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 对一切 $\mathbf{x}\neq0$ 是负的, 则此系统是大范围渐近稳定的. 这个论断意味着系统只有一个平衡点.

7.9. 李雅普诺夫函数的作法

李雅普诺夫稳定性定理是存在性定理. 亦即可陈述为: 如果存在一个李雅普诺夫函数, 系统是稳定的. 关于这些函数如何求得, 一点都没有说到. 这很像一个大城市的警察局长收到一封信告发在他的良好的城市里有一个贼. 警察局长当然知道了这种情况, 可是他需要知道的是如何捉住这个贼. 然而这封信提供很少或者没有什么信息. 反之, 如果这封信描述了这个贼的一些特点, 如身长、体重、眼睛的颜色, 看到他的地方等等, 搜索这个贼的范围就缩小了. 另外, 警察局长可能有一个所有已知道的贼的登记表, 他就可检查是否有与所提供的特点相吻合的. 如果他有多年的经验, 这些经验会教给他有条不紊的破案方法. 在寻找李雅普诺夫函数上有类似的情况.

首先, 李雅普诺夫函数是个标量函数. 第二, 它在原点附近必

须是正定的. 第三，沿着与系统有关的轨线对时间的变化率一定是非正的. 第四，它不是唯一的，正如在§7.7看到的，在那里对于一个已知系统我们找出三个不同的李雅普诺夫函数，每个都有不同稳定性区域. 第五，一个良好的李雅普诺夫函数必须显示所要求的设计关系，此关系取决于系统的需要. 作为例子，在§7.7的第一个李雅普诺夫函数就没有反映稳定区域作为 b 或阻尼的函数时在大小上有任何变化. [在(7.7-3)中的 b 项通常称为阻尼项或粘滞力项，所以 b 通常称为阻尼系数.]一个设计要求可以选择充分的阻尼以使得对于已知初始条件稳定运动能够得到保证. 所以第一个李雅普诺夫函数，如果初始条件出了它的稳定性区域，它将被舍弃.

在下面四节里介绍求李雅普诺夫函数的几个方法. 每一个方法的效用依赖于所遇到的微分方程的结构。每一个方法的优点由读者通过许多例子的研究来评定.

7.10. 线性自治系统的李雅普诺夫函数

考察定常系统

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x} \tag{1}$$

在§6.6我们得出如果 $\mathbf{A}$ 的所有特征值有负实部，方程(1)是大范围渐近稳定的(定理6.6-1). 与此对比，我们利用李雅普诺夫第二方法来考察方程(1)的稳定性. 我们取二次型

$$V=\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x} \qquad \mathbf{B}=\mathbf{B}^T \tag{2}$$

作为李雅普诺夫函数. 矩阵 $\mathbf{B}$必须是正定的，但现在还是未定的. 由(1)及(2)有

$$\dot{V}=\mathbf{x}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{B}+\mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{x}=2\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{x} \tag{3}$$

如果 $\dot{V}$ 是负定的，它提供了渐近稳定性的充分条件. 由于 $\mathbf{A}^T\mathbf{B}+\mathbf{B}\mathbf{A}$ 是对称的，而 $\mathbf{B}\mathbf{A}$ 一般不是对称的，我们考察 $\mathbf{A}^T\mathbf{B}+\mathbf{B}\mathbf{A}$ 的负

定条件. 为了简化讨论,令

$$\mathbf{A}^T\mathbf{B}+\mathbf{B}\mathbf{A}=-\mathbf{C} \qquad \mathbf{C}^T=\mathbf{C} \tag{4}$$

根据这样的定义可见为了得到渐近稳定性的充分条件可把 $\mathbf{C}$ 选成正定的. 为了求 $\mathbf{B}$, 可任意令 $\mathbf{C}=\mathbf{I}$, 这是一个简单的正定矩阵. 由于 $\mathbf{B}$ 是 $n\times n$ 对称矩阵, 方程(4)表示$\frac{n(n+1)}{2}$个未知数(即 $\mathbf{B}$的元素)的线性方程组. 如果 $\mathbf{A}$ 有相异的特征值, 此方程组有唯一解[Bellman, 1960]. 所以 $\mathbf{B}$ 的元素可以用 $\mathbf{A}$ 的元素表示出来. $\mathbf{B}$ 是正定的条件(定理 3.11-1: $\mathbf{B}$的顺序主子式必须大于零)由罗兹-霍尔维茨不等式确定, 它在附录 Ⅳ 中给出[Kalman 和 Bertram, 1960]. 下面的例子将说明这个想法.

例 7.10-1 求使系统

$$\ddot{y}+\alpha\dot{y}+\beta y=0$$

是渐近稳定时, α 和 β 应满足的充分条件. 令 $x_1=y$, $x_2=\dot{y}$; 有

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\beta & -\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\mathbf{A}\mathbf{x}$$

选取 V 为二次型

$$V=[x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{12} & b_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x}$$

这里 $\mathbf{B}$ 满足

$$\mathbf{A}^T\mathbf{B}+\mathbf{B}\mathbf{A}=-\mathbf{I}$$

由 $\mathbf{A}$ 的表达式, 得到方程组的显式

$$\begin{bmatrix}-2\beta b_{12} & b_{11}-\alpha b_{12}-\beta b_{22}\\ b_{11}-\alpha b_{12}-\beta b_{22} & 2b_{12}-2\alpha b_{22}\end{bmatrix}=-\mathbf{I}$$

$\mathbf{B}$ 的元素求出为

$$b_{11}=\frac{\alpha}{2\beta}+\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{1}{2\alpha}$$

$$b_{22}=\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{2\alpha\beta}$$

$$b_{12}=\frac{1}{2\beta}$$

由定理 3.11-1，如果

$$b_{11}>0 \quad b_{22}>0 \quad b_{11}b_{22}-b_{12}^2>0$$

则 **B** 是正定的，亦即 **B** 的顺序主子式必须大于零．用 α, β 表示，上面的条件化为

$$\frac{\alpha^2+\beta^2+\beta}{2\alpha\beta}>0 \qquad \frac{\beta+1}{2\alpha\beta}>0 \qquad \frac{\alpha^2+(\beta+1)^2}{4\alpha^2\beta}>0$$

最后的不等式要求 $\beta>0$．现在，如果 $\beta>0$，则前两个不等式要求 $\alpha>0$．注意条件 $\beta>0$ 和 $\alpha>0$ 就是罗兹-霍尔维茨稳定性的要求(附录 IV)．

如果线性系统的平衡点是渐近稳定的，则运动是大范围渐近稳定的．这可由观察

$$V=\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x} \tag{5}$$

得到．上式可写成(3.11-7)的形式

$$V=\mathbf{z}^T\mathbf{D}\mathbf{z}=\lambda_1 z_1^2+\lambda_2 z_2^2+\cdots+\lambda_n z_n^2 \tag{6}$$

其中各个 λ_i 是 **B** 的特征值．因为 **B** 是正定的，所有特征值都是正的．所以当 $\|\mathbf{z}\|$ 趋于无穷时 V 也趋于无穷．其次，由相似的讨论，$\dot{V}$ 对一切 $\mathbf{x}$ 是负定的；所以满足定理 7.8-1 的条件，因此运动是大范围渐近稳定的．

7.11. 二次型李雅普诺夫函数的构成

在上面的讨论中二次型被用以研究线性系统的稳定性．让我们看看二次型在分析非线性系统时是否有用处．今企图确定非线性自治系统

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{f}(\mathbf{0})=\mathbf{0} \tag{1}$$

渐近稳定性的条件．我们只考虑可写成形式

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &= f_{11}(x_1)+f_{12}(x_2)+\cdots+f_{1n}(x_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(\mathbf{x}) &= f_{n1}(x_1)+f_{n2}(x_2)+\cdots+f_{nn}(x_n) \end{aligned} \tag{2}$$

的系统的非线性性质．很大一类的非线性系统可以写成这种形式．

所以这样的限制是并不太苛求的. (2)式也可写成形式

$$f_i(\mathbf{x})=\frac{f_{i1}(x_1)}{x_1}x_1+\frac{f_{i2}(x_2)}{x_2}x_2+\cdots+\frac{f_{in}(x_n)}{x_n}x_n \tag{3}$$

一般,假定下列极限存在:

$$\lim_{x_j\to 0}\frac{f_{ij}(x_j)}{x_j}$$

按照上面的考虑,方程(1)可写成形式

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{x} \tag{4}$$

其中

$$\mathbf{F}(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}\frac{f_{11}(x_1)}{x_1} & \cdots & \frac{f_{1n}(x_n)}{x_n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \frac{f_{n1}(x_1)}{x_1} & \cdots & \frac{f_{nn}(x_n)}{x_n}\end{bmatrix} \tag{5}$$

现在求方程(4)是渐近稳定的充分条件. 又一次选取一个正定二次型作为李雅普诺夫函数

$$V=\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x} \qquad \mathbf{B}^T=\mathbf{B} \tag{6}$$

如上, $\mathbf{B}$ 的元素是常数. V 的时间变化率为

$$\dot{V}=\dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{B}\mathbf{x}+\mathbf{x}^T\mathbf{B}\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{x}^T[\mathbf{F}^T(\mathbf{x})\mathbf{B}+\mathbf{B}\mathbf{F}(\mathbf{x})]\mathbf{x} \tag{7}$$

若 $\mathbf{B}$ 是正定的,又 $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ 定义为

$$\mathbf{F}^T(\mathbf{x})\mathbf{B}+\mathbf{B}\mathbf{F}(\mathbf{x})=-\mathbf{C}(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{C}^T(\mathbf{x})=\mathbf{C}(\mathbf{x}) \tag{8}$$

它也是正定的, 则渐近稳定性的充分条件是容易建立的. 虽然关系式(7)不是线性二次型, 使 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 为负定的条件是和线性的情况一样的. 亦即对

$$\mathbf{C}(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}c_{11}(\mathbf{x}) & \cdots & c_{1n}(\mathbf{x})\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ c_{1n}(\mathbf{x}) & \cdots & c_{nn}(\mathbf{x})\end{bmatrix}$$

的顺序主子式

$$c_{11}(\mathbf{x})>0$$

$$\begin{vmatrix} c_{11}(\mathbf{x}) & c_{12}(\mathbf{x}) \\ c_{12}(\mathbf{x}) & c_{22}(\mathbf{x}) \end{vmatrix} > 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

的条件是建立渐近稳定性的充分条件.

如果使用二次型[关系式(6)],则大范围渐近稳定性可以容易地断定，因为 $\dot{V}=\left(\dfrac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\right)\dot{\mathbf{x}}$ 对一切 $\mathbf{x}$ 是负定的条件是容易检验的.亦即

1. 若仅在原点(只有一个平衡点)$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{0}$,且

2. 若对一切 $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$, $\dfrac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}$不正交于 $\dot{\mathbf{x}}$,

则对一切 $\mathbf{x}$, $\dot{V}$ 是负定的，因为$\dfrac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}=2\mathbf{x}^T\mathbf{B}$ 只在原点为零. 由于当 $\|\mathbf{x}\|\to\infty$ 时 $V\to\infty$，大范围渐近稳定性的条件是满足的(定理 7.8-1).

对于非线性系统,因为 $\mathbf{C}(\mathbf{x})$依赖于 $\mathbf{x}$, $\mathbf{C}(\mathbf{x})$不能像线性系统那样随便选取. 一般,首先选取 $\mathbf{B}$ 是较易的，再看 $\mathbf{C}(\mathbf{x})$取什么. 在选取 $\mathbf{B}$ 时应考虑下面两个指导原则:

1. 李雅普诺夫函数应该尽可能简单.

2. 李雅普诺夫函数在有兴趣的区域中应显示所要求的信息.

这两条想法提供一个作法. 首先对 $\mathbf{B}$ 选取简单的形式. 建议取任意正元素的对角形矩阵,例如

$$\mathbf{B}=\mathrm{diag}[b_1,\cdots,b_n] \tag{9}$$

这个动机是明显的.如果对称矩阵不在对角线上的项大部分为零,它的正定的条件可简单的表示出来. $\mathbf{C}(\mathbf{x})$按(8)式计算以后，选取 b_i 项使 $\mathbf{C}(\mathbf{x})$是正定的条件也是容易建立的. 这就是，我们试图消去 $\mathbf{C}(\mathbf{x})$中不在对角线上的项. 如果发生了问题,可以引入 $\mathbf{B}$ 中不在对角线上的一项或二项,以使 $\mathbf{C}(\mathbf{x})$简化.

由表达式(7.1-4)，我们也想起把积分项引入 V，它对应于位能，例如

$$d_{ij}\int_0^{x_j} f_{ij}(u)du \tag{10}$$

对于充分条件

$$\frac{f_{ij}(x_j)}{x_j}>0 \qquad \lim_{x_j\to 0}\left|\frac{f_{ij}(x_j)}{x_j}\right|<\infty \qquad d_{ij}>0$$

积分项在 R 域内是正定的。d_{ij} 的值的选取应使 $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ 尽可能简单。在这里谨慎是应当的。当积分项加在二次型 V 上，V 的梯度在异于原点处可能为零；所以大范围运动的稳定性问题就可能难以回答。上面的想法由下例说明之。

例 7.11-1 图 7.11-1 表示的非线性反馈系统的运动方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 6\\ -\dfrac{h(x_1)}{x_1} & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ u\end{bmatrix} \quad u=0,\ h(0)=0$$

其中 $x_1=y$ 及 $x_2=v$。下面的二次型可取作李雅普诺夫函数的候选者：

$$V=[x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix}b_{11} & 0\\ 0 & b_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

矩阵 $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ 求得为

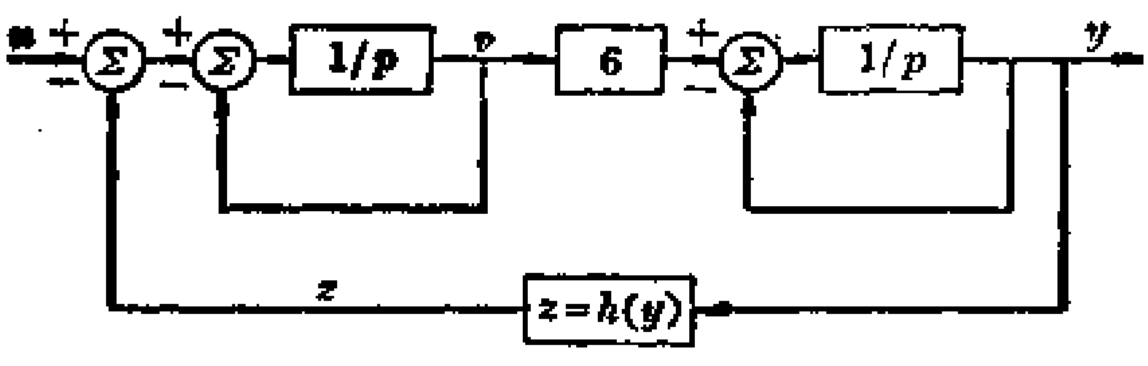


图 7.11-1 一个非线性系统

$$\mathbf{C}(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}2b_{11} & b_{22}\dfrac{h(x_1)}{x_1}-6b_{11}\\ b_{22}\dfrac{h(x_1)}{x_1}-6b_{11} & 2b_{22}\end{bmatrix}$$

如果它是正定的，就给出渐近稳定的充分条件。若取 $b_{11}=\frac{1}{4}$，$b_{22}=1$，V 是正

定的且 $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ 也是正定的，只要

$$4b_{11}b_{22}-\left[b_{22}\frac{h(x_1)}{x_1}-6b_{11}\right]^2=1-\left[\frac{3}{2}-\frac{h(x_1)}{x_1}\right]^2>0$$

或

$$\frac{1}{2}<\frac{h(x_1)}{x_1}<\frac{5}{2}$$

这个条件表示 $h(x_1)$ 的线性边界，如图 7.11-2 所示．对于靠近原点的初始条件 $\mathbf{x}_0$ 而 $h(x_1)$ 包含在线性边界之内，系统是渐近稳定的．如果对于所有 x_1，$h(x_1)$ 包含在线性边界之内，系统是大范围渐近稳定的．

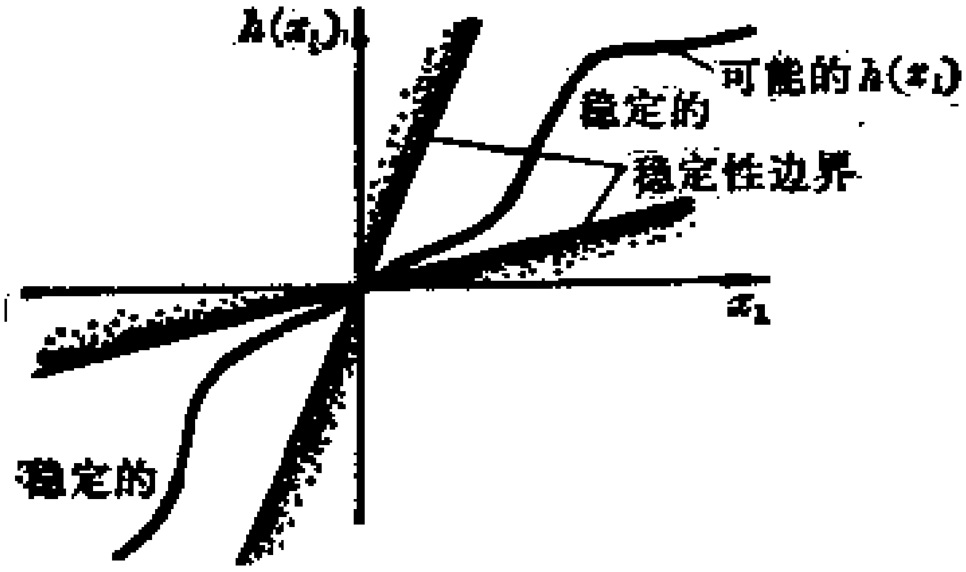


图 7.11-2　在 x_1-$h(x_1)$ 平面上 $h(x_1)$ 的线性边界

7.12. 克拉晓夫斯基方法

有时如果微分方程是一种特殊形式，李雅普诺夫函数可直接选取．所得到的稳定性条件可能满足或不满足分析的要求．我们必须用微分方程的结构及用 $\dot{V}$ 计算后的结果来判断克拉晓夫斯基方法的效用．

考察由方程

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x})\qquad \mathbf{f}(\mathbf{0})=\mathbf{0}\tag{1}$$

描述的自治系统，且限定 $\dfrac{\partial\mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}$ 在有兴趣的区域内存在．李雅普诺夫函数取作 $\dot{\mathbf{x}}$ 的欧几里得范数

$$V=\|\dot{\mathbf{x}}\|^2=\mathbf{f}^T(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})\geqslant 0\tag{2}$$

由于李雅普诺夫函数在异于原点的点处可能有零梯度，以及方程(1)可能有多于一个平衡点，因而大范围运动的稳定性边界可能难以求得．V 的时间变化率求得为

$$\dot{V}=\left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}\right]^T\mathbf{f}(\mathbf{x})+\mathbf{f}^T(\mathbf{x})\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}$$

$$=\dot{\mathbf{x}}^T[\mathbf{F}^T(\mathbf{x})+\mathbf{F}(\mathbf{x})]\dot{\mathbf{x}}=-\dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{C}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} \qquad (3)$$

这时

$$\mathbf{F}(\mathbf{x})=\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}=\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right] \qquad (4)$$

偏导数不必计算出数来，就像线性化问题中一样．如果(3)式是非正的，或者如果

$$\mathbf{C}(\mathbf{x})=-[\mathbf{F}^T(\mathbf{x})+\mathbf{F}(\mathbf{x})] \qquad (5)$$

是非负的，则稳定性的充分条件就可建立了．对于渐近稳定性，$\mathbf{C}(\mathbf{x})$必须是正定的．要注意的是如果 $\mathbf{C}(\mathbf{x})$是正定的，分量 $f_i(\mathbf{x})$必须含有 x_i．因为如果 $f_i(\mathbf{x})$不是 x_i 的函数，则 $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ 的对角线元素将为零，所以 $\mathbf{C}(\mathbf{x})$就不会是正定的．考察下列例子．

例 7.12-1 考察由图 7.12-1 所示的系统．设 $x_1=y_1$，$x_2=y_2$．对应的微分方程是

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-g_1(x_1)+g_2(x_2)\\ x_1-ax_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1\\ f_2\end{bmatrix}$$

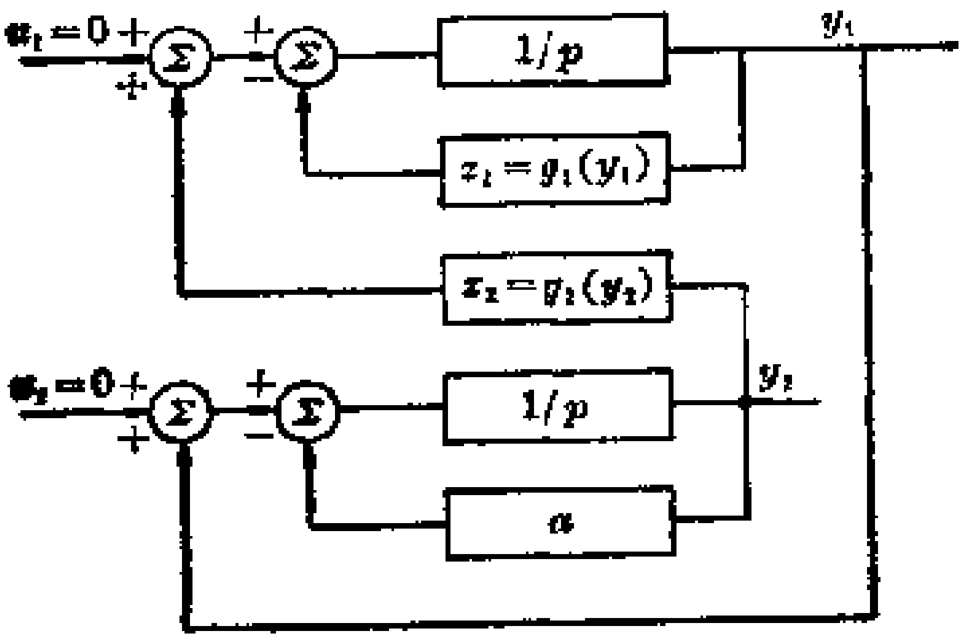


图 7.12-1　例 7.12-1 控制系统的方框图

设 $g_1(0)=g_2(0)=0$. 矩阵 $\mathbf{F}$ 是

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix} -\frac{\partial g_1(x_1)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2(x_2)}{\partial x_2} \\ 1 & -a \end{bmatrix}$$

又矩阵 $\mathbf{C}$ 是

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 2\frac{\partial g_1(x_1)}{\partial x_1} & -\left[1+\frac{\partial g_2(x_2)}{\partial x_2}\right] \\ -\left[1+\frac{\partial g_2(x_2)}{\partial x_2}\right] & 2a \end{bmatrix}$$

渐近稳定性的充分条件是

(i) $a>0$

(ii) $\frac{\partial g_1(x_1)}{\partial x_1}>0$

(iii) $4a\frac{\partial g_1(x_1)}{\partial x_1}-\left[1+\frac{\partial g_2(x_2)}{\partial x_2}\right]^2>0$

第二个不等式要求 $g_1(x_1)$ 的斜率是正的，如图 7.12-2 所示。第三个不

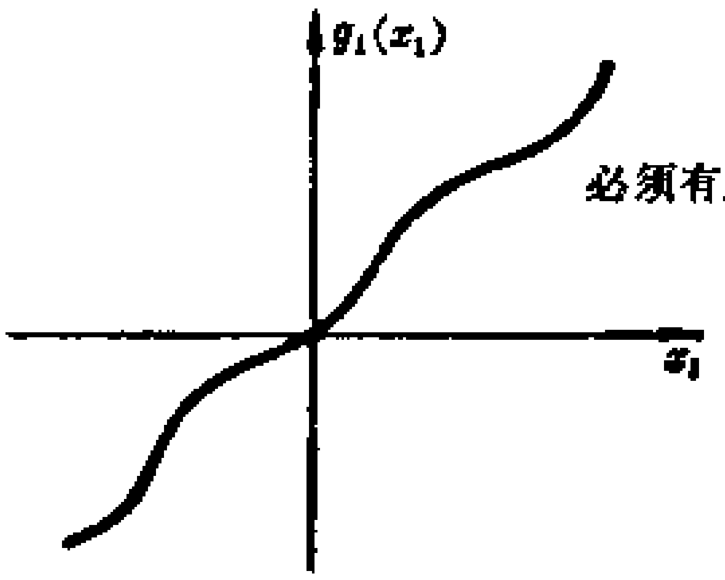


图 7.12-2 例 7.12-1 中关于 $g_1(x_1)$ 的典型关系

等式给出在 $a\frac{\partial g_1(x_1)}{\partial x_1}$ 作为 $\frac{\partial g_2(x_2)}{\partial x_2}$ 的函数的平面上的稳定性边界，如图 7.12-3 所示。当函数 $\frac{\partial g_1(x_1)}{\partial x_1}$ 及 $\frac{\partial g_2(x_2)}{\partial x_2}$ 在 R 中 x_1 和 x_2 的一切值为已知时，由这些数值决定的区域可画在图 7.12-3 的坐标平面上。如果这个区域被全部包含在稳定性边界之内，则可以保证在 R 内的渐近稳定性。

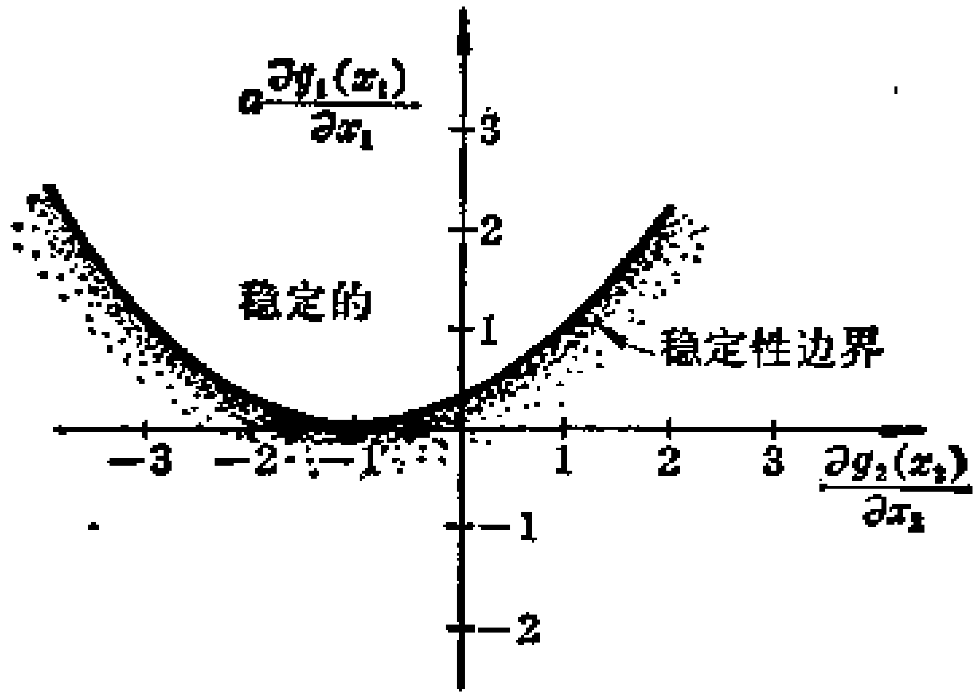


图 7.12-3 例 7.12-1 中系统的稳定性边界

7.13. 变梯度法

在 § 7.10 中求李雅普诺夫函数时是先选取 $\dot{V}$. 在 § 7.11 中 V 被取作二次型，再计算 $\dot{V}$，然后再根据 $\dot{V}$ 的结果修改 V. 在克拉晓夫斯基方法中首先选取 V. 在变梯度法中相反地先选取 V 的梯度. 舒尔兹及克布森[1962]指出梯度的某些性质，这些性质通常可简化李雅普诺夫函数的寻找.

首先，对于微分方程 $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x})$（我们再一次仅考虑自治系统）选取梯度 $\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}$ 的一般形式，由此容易计算出 $\dot{V}$ 为

$$\dot{V}=\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}=\frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1+\frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2+\cdots+\frac{\partial V}{\partial x_n}\dot{x}_n \tag{1}$$

其次，李雅普诺夫函数简单地就是梯度的线积分. 线积分的范围是从原点开始到相空间中的一点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，在原点有 $V=0$ 及 $\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}=0$. 回忆梯度的积分是和积分路线无关的[Wylie, 1966]. 为了简便，我们选取表示在下列式子中的路线：

$$V=\int_0^{x_1}\frac{\partial}{\partial v_1}[V(v_1, 0, \cdots, 0)]dv_1$$

$$+\int_0^{x_2}\frac{\partial}{\partial v_2}[V(x_1, v_2, 0, \cdots, 0)]dv_2$$

$$+\cdots+\int_0^{x_n}\frac{\partial}{\partial v_n}[V(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, v_n)]dv_n \tag{2}$$

此路线开始于原点沿 $\mathbf{e}_1$ 运动到 x_1，然后在 $\mathbf{e}_2$ 方向上运动到 x_2，等等. 所以在选定 V 的梯度后，V 就能够有条不紊地计算出来.

虽然梯度选取了一般形式，但它必须满足性质

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial V}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right) \tag{3}$$

亦即二阶偏导数对 x_i 及 x_j 的计算次序是无关的. 有$\frac{n(n-1)}{2}$个这样的方程. 从表面上看(3)式是显然的，但是因为$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}$是首先取定的，就必须取得使其满足(3)式. 如果首先选取 V，则 V 的梯度自然会满足关系式(3).

变梯度法的另一值得注意的是关于$\frac{\partial V}{\partial x}$的初始选择的一般性质. 在二次型方法中，把 V 开始就选为一种简单形式，然而在变梯度法中宁可选取梯度的一般的形式. 舒尔兹及克布森[1962]介绍了下列形式

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}=\begin{bmatrix} \alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\cdots+\alpha_{1n}x_n \\ \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\cdots+\alpha_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n1}x_1+\alpha_{n2}x_2+\cdots+\alpha_{nn}x_n \end{bmatrix}^T \tag{4}$$

一般说来，系数 α_{ij} 是 $\mathbf{x}$ 的函数，所以(4)式可能是非线性的. 这表示如(1)和(2)式所指出的在计算 $\dot{V}$ 和 V 时没有严格的限制. 然而我们希望选择系数 α_{ii} 只是 x_i 的函数，因为积分

$$\int_0^{x_i}\alpha_{ii}u\,du \tag{5}$$

对应于 V 的等价二次型的对角线上的项．如果这样做了，V 是正定的条件通常就更简单了．例如若令 α_{ii} 等于正常数 a_{ii}，则 V 将包含项 $\frac{1}{2}a_{ii}x_i^2$，这是所希望的．根据经验可把 α_{nn} 取为 2.

在变梯度法中所取的步骤是：

1. 写出 $\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}$ 如(4)式所指出的形式．

2. 由 $\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}$ 及运动方程 $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 计算 $\dot{V}$.

3. 限定 $\dot{V}$ 必须是负定的或非正的条件下，选取某些系数 α_{ij} 使 $\dot{V}$ 简化．

4. 利用 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个二阶偏导数的表达式［关系式(3)］决定其它的 α_{ij} 项．要记住这些项可能依赖于 $\mathbf{x}$；所以正常的处理必须是能够作微分法．

5. 检查第三步，因为在第四步中计算函数 $\dot{V}$ 时可能变化其负定性或非正性．

6. 如(2)式所指出的方法把 $\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}$ 积分求 V，它必须是正定的．

7. 研究 V 及 $\dot{V}$ 以确定稳定性边界．

下面的例子说明这个程序．

例 7.13-1　考察如图 7.13-1 所示的系统．对渐近稳定性求设计参数 a 的条件．系统的方程是

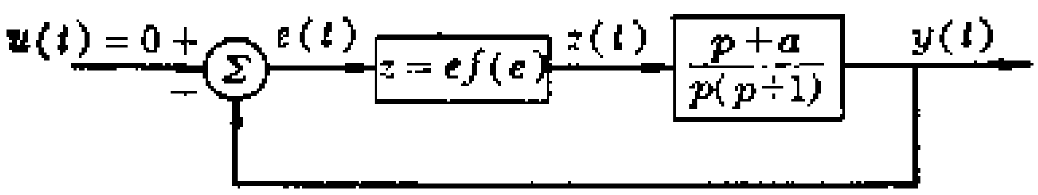


图 7.13-1　例 7.13-1 的控制系统

$$z=ef(e)$$

$$\ddot{y}+\dot{y}=\dot{z}+az$$

$$y=-e$$

它们可结合成

$$\ddot{e}+\dot{e}+f(e)\dot{e}+\frac{\partial f(e)}{\partial e}\dot{e}e+aef(e)=0 \tag{6}$$

对于状态变量 $x_1=e$ 及 $x_2=\dot{e}$, 方程(6)可写成形式

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\ -x_2-f(x_1)x_2-\dfrac{\partial f(x_1)}{\partial x_1}x_1x_2-ax_1f(x_1)\end{bmatrix}$$

第一步, V 的梯度取为一般形式

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}=[\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2 \quad \alpha_{21}x_1+2x_2]$$

其中 α_{11} 只是 x_1 的函数. 第二步, $\dot{V}$ 可求得为

$$\dot{V}=x_1^2[-\alpha_{21}af(x_1)]+x_2^2\left[\alpha_{12}-2-2f(x_1)-2x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\right]$$
$$+x_1x_2\left[\alpha_{11}-\alpha_{21}-\alpha_{21}f(x_1)-2af(x_1)-\alpha_{21}x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\right] \tag{7}$$

如第三步所指出的, 令 $\alpha_{12}=2$, 以简化(7)式中 x_2^2 的系数. 如果能令 x_1x_2 的系数为零, 则在 $\dot{V}$ 是负定的条件下可进一步简化. 因此我们令

$$\alpha_{11}=\alpha_{21}+\alpha_{21}f(x_1)+2af(x_1)+\alpha_{21}x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}$$

根据第四步, (3)式给出

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 V}{\partial x_2\partial x_1}=\alpha_{21}=\alpha_{12}=2$$

按着以上的假设和条件, $\dot{V}$ 化为

$$\dot{V}=-2af(x_1)x_1^2-2\left[f(x_1)+x_1\frac{\partial f(x_1)}{\partial x_1}\right]x_2^2 \tag{8}$$

第五步, $\dot{V}$ 是负定的条件现在容易建立了; 即 x_1^2 与 x_2^2 的系数必须小于零.

根据第六步, 求李雅普诺夫函数只要把梯度

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}=\begin{bmatrix}2x_1+2ax_1f(x_1)+2x_1\left[f(x_1)+x_1\dfrac{\partial f(x_1)}{\partial x_1}\right]+2x_2\\ 2x_1+2x_2\end{bmatrix}^T$$

积分, 得出结果为

$$V=2\int_0^{x_1}ax_1f(x_1)dx_1+2\int_0^{x_1}x_1\left[f(x_1)+x_1\frac{\partial f(x_1)}{\partial x_1}\right]dx_1+(x_1+x_2)^2$$

对于渐近稳定性, 可建立 $\dot{V}$ 是负定的充分条件如下. 由(8)式我们要求

$$\frac{dz}{de}=f(x_1)+x_1\frac{\partial f(x_1)}{\partial x_1}>0$$

及

$$af(x_1)>0$$

若 $a>0$，则线性化后的系统的特征值在左半平面．所以在这个条件下就要求

$$f(x_1)>0$$

V 所要求的这些条件也是 V 中积分项是正定的充分条件．

7.14. 结束语

李雅普诺夫第二方法或直接方法已成为非常一般的解析工具．在理论上，一般非线性时变系统的稳定性可以研究．然而在实际上，通常使用起来是困难的．基本的困难是找一个合适的李雅普诺夫函数．即使一个也不能容易地找到，系统也可能是稳定的．另一方面，如果找到一个，必须建立稳定性边界，这通常也是件困难事情．进而言之，即使稳定性边界找到了，在边界外面关于运动的稳定性或不稳定性仍作不出什么结论．但是利用数字计算机，这些工作中一部分可以简化．

李雅普诺夫第一方法（介绍在§6.6）比第二方法简单得多．因此建议首先考虑第一方法．如果它给出足够的稳定性信息，第二方法就不必考虑了．然而，在一些重要的控制问题中，第一方法得不出信息．例如在不连续系统中，象§6.9 中的继电器控制问题，在有兴趣的区域内非线性函数的偏导数不存在．另一方面，第二方法可以给出一个合适的答案．线性离散时间系统的稳定性将在第八章讨论．

参考文献

Antosiewicz, H. A.: A Survey of Lyapunov's Second Method, *Contrib. Nonlinear Oscillations*, IV, *Ann. Math. Study*. vol. 41,

pp. 147—166, 1958, Princeton University Press, Princeton, N. J.

Bellman, R.: *Stability Theory of Differential Equations*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1953.

Bellman, R.: *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1960.

D'Azzo, J. J., and C. H. Houpis: *Feedback Control System Analysis and Synthesis*, 2d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.

DeRusso, P. M., R. J. Roy, and C. M. Close: *State Variables for Engineers*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1965.

Hahn, W.: *Theory and Application of Lyapunov's Direct Method*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1963.

Hurwitz, A.: Ueber die Bedingungen unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negative reelen Theilen besitzt, *Math. Ann.*, vol. 46, p. 273, 1895.

Kalman, R. E., and J. E. Bertram: Control System Analysis and Design via the Second Method of Lyapunov: I, Continuous-time Systems; II, Discrete-time System, *Trans. ASME*, ser. D, *J. Basic Eng.*, vol. 83, 1960.

LaSalle, J. P.: Some Extensions of Lyapunov's Second Method, *RIAS Tech. Rept.* 60-5, AFOSR TN-60-22, 1960.

LaSalle, J. P., and S. Lefshetz: *Stability by Lyapunov's Direct Method with Applications*, Academic Press Inc., New York, 1961.

Lefshetz, S.: *Differential Equations: Geometric Theory*, Interscience Publishers, Inc., New York, 1957.

Letov, A. M.: *Stability in Nonlinear Control Systems*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1961.

Lyapunov, A. M.: Problème général de la stabilité du mouvement, *Commum. Soc. Math. Kharkow*, 1893 (American edition of 1907 French translation: *Annals* of *Mathematics Study*, no. 17, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1949).

Malkin, I. G.: *Theory of Stability of Motion*, AEC Translation

3352, U. S. Department of Commerce, Washington, 1958.

Maxwell, J. C.: On Governors, *Proc. Roy. Soc. London*, vol. 16, pp. 270—283, 1868.

Poincaré, J. H.: *Les Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Dover Publications, Inc., New York, 1957.

Routh, E. J.: *A Treatise on the Stability of a Given State of Motion* (Adams Prize Essay), The Macmillan Company, London, 1877.

Schultz, D. G., and J. E. Gibson: The Variable Gradient Method for Generating Lyapunov Functions, *Trans. AIEE*, vol. 81, pt. II, pp. 203—210, 1962.

Stern, T. E.: *Theory of Nonlinear Networks and Systems: An Introduction*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1965.

Wylie, C. R., Jr.: *Advanced Engineering Mathematics*, 3d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.

习题

7.1. 验证关系式 7.7-6.

7.2. 验证关系式 7.7-7.

7.3. 对系统

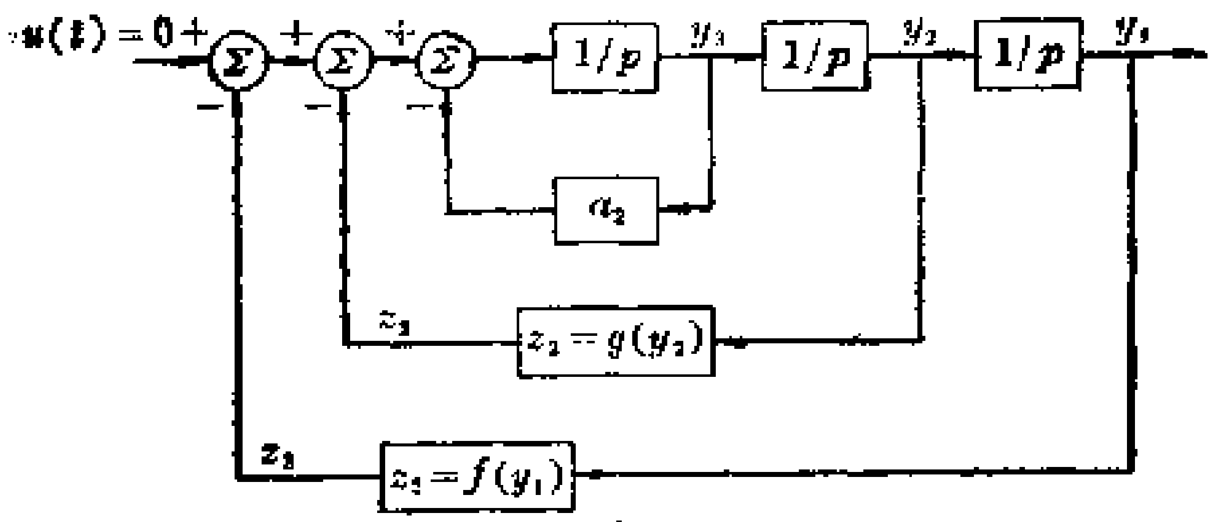
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - ax_1(x_1^2 + x_2^2) \\ -x_1 - ax_2(x_1^2 + x_2^2) \end{bmatrix}$$

在原点用 $V = x_1^2 + x_2^2$ 求渐近稳定性的条件.

答: $\dot{V} = -2aV^2$; $a > 0$

7.4. 用求解 $\dot{V} = -2aV^2$ 估计习题 7.3 中的系统的最大时间响应. 在

$$G(x_2)=\int_0^{x_2} g(x_2)\,dx_2$$



$g(0)=f(0)=0$

图 P7.5

答：$\dot{V}=-[a_2 g(x_2)/x_2-f'(x_1)]x_2^2$. 充分条件是 $a_2>0$, $\dfrac{f(x_1)}{x_1}>0$,

$\dfrac{a_2 g(x_2)}{x_2}-f'(x_1)>0$ 对一切 x_1 与 x_2.

7.6. 试证习题 7.5 中系统的运动方程能写成

$$\dddot{y}_1+a_2\ddot{y}_1+g(\dot{y}_1)+f(y_1)=0 \quad g(0)=f(0)=0$$

对相似的线性系统

$$\dddot{y}_1+a_2\ddot{y}_1+a_1\dot{y}_1+a_0 y_1=0$$

求其罗兹-霍尔维茨稳定条件（附录 III）．把所得结果与习题 7.5 的答案比较之．

7.7. 把习题 7.5 的非线性系统在原点线性化，并用 § 7.10 所述的方法求渐近稳定性的条件．又用罗兹-霍尔维茨条件(附录 III）求渐近稳定性的条件．把所得的结果与习题 7.5 的答案比较之．

7.8 用能量表达式(7.1-4)作为李雅普诺夫函数，试证，除了条件

$$V(y)\to\infty \qquad \text{当}\ |y|\to\infty$$

之外，下列系统显示，对大范围渐近稳定性所有条件是充分的．系统是一维位场中单位质量的质点的运动，其中引力是

$$h(y)=\begin{cases}-y & |y|<1\\ -\dfrac{|y|}{y^3} & |y|\geq 1\end{cases}$$

又摩擦力 $f(y,\dot{y})$ 与速度反向：

$$f(x,\dot{x})=-\frac{1}{2}|g(y)|\operatorname{sign}\dot{y} \qquad \operatorname{sign}\dot{y}=\begin{cases}1 & \dot{y}>0\\ 0 & \dot{y}=0\\ -1 & \dot{y}<0\end{cases}$$

7.9. 对习题 7.8 中的系统,试证它不是拉格朗日稳定的,因此它不是大范围渐近稳定的.

7.10. 对下列系统,试说明为什么用李雅普诺夫第一方法来决定平衡点(0,0)的稳定性问题是失效的. 参见定理 6.6-2.

a. $\dot{x}_1=x_2$

$\dot{x}_2=-x_1e^{-x_1^2}-x_2e^{-x_2^2}\ x_1^2e^{-2x_1^2}$

b. $\dot{x}_1=-2(x_1^2+x_2^2)x_1+3x_2^2-4x_2^4(x_1^2+x_2^2)^{-1}$

$\dot{x}_2=-2(x_1^2+x_2^2)x_2-3x_1x_2+4x_1x_2^3(x_1^2+x_2^2)^{-1}$

c. $\dot{x}_1=x_1^2-x_2^2$

$\dot{x}_2=-2x_1x_2$

7.11. 对习题 7.10 中的系统,用李雅普诺夫函数 $V=-x_1^3+3x_1x_2^2$ 研究稳定性. 倘若可能,试指出完全稳定性;如果不是,试证原点是渐近稳定的,或正好是稳定的,或不稳定的.

7.12. 试证

$$V=\dot{y}^2+\omega_n^2y^2=r$$

是

$$\ddot{y}+2\zeta\omega_n\dot{y}+\omega_n^2y=0 \qquad \zeta>0,\ \ \omega_n\neq0$$

的稳定性边界,其中 r 是一个正的任意大的常数. 对于这个系统的稳定运动关于初始条件能说些什么?

7.13. 对于系统

$$\ddot{y}+4\dot{y}+y-y^3=0$$

关于 $y=\dot{y}=0$ 试至少求出两种稳定性边界. 设 $x_1=y$, $x_2=\dot{y}$.

7.14. 对于系统

$$\ddot{y}+4\dot{y}+\sin y=0$$

关于 $y=\dot{y}=0$ 试至少求出两种稳定性边界. 设 $x_1=y$, $x_2=\dot{y}$.

7.15. 在变梯度法中,若梯度选作线性型,试证 $\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$. 如果 α_{ij} 与 α_{ji} 依赖于 x,它们之间的关系是什么?

7.16. 对图 P 7.16 所表示的系统,试求系统是完全稳定的条件. 利用变梯度法.

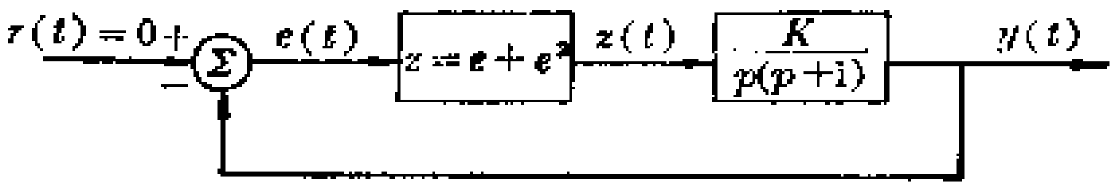


图 P7.16

7.17. 利用变梯度法，试求关于β的充分条件使得图 P7.17 中的系统是完全稳定的.

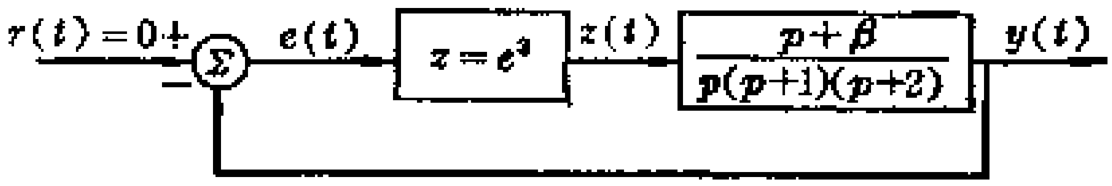


图 P7.17

7.18. 利用变梯度法，对习题 7.5 中的系统，试求李雅普诺夫函数以及对应的稳定性条件。

第八章 离散时间系统

8.1. 引言

状态空间方法使得连续系统和离散时间系统二者的分析与综合有可能在一个理论下统一起来。事实上，这些方法与大型数字计算机的使用结合在一起已经成为一般离散时间系统研究中分析与综合的重要工具．传统的 z-变换分析方法只能用于处理特殊类型的离散系统问题．在这一章里我们试图说明连续系统与离散时间系统之间关于定义、概念和定理的相似性．我们将看到在前几章中的绝大部分工作只要作次要的及某些明显的修改便可直接应用于离散时间系统．

在 §8.2 我们建立记号并介绍一些导致离散时间系统的问题．我们把绝大部分注意力集中在抽样数据系统．一般说来，抽样数据系统可以认为来源于连续系统，它的输入与输出由于某种“抽样”操作而受到约束．我们所关心的离散时间系统是由常差分方程控制的．因此我们要说明对差分方程如何定义状态变量．在 §8.5 借助于古典的方法讨论差分方程的解法．在 §8.6 我们正式介绍 z 变换并且简略地推导它的一些性质及其在解差分方程上的应用．在 §8.7 以对稳定性的有限的讨论来结束这一章．我们把第六、七章中稳定性的若干概念和定理推广到离散时间系统上的工作留给读者．

8.2. 离散时间系统

在这一节里我们引入一些与离散时间系统有关的记号和定

义．离散时间系统来源于各种不同方面．如果使一个连续动态系统的一个或几个变量只按离散时间变化，则此系统便可看作是离散时间系统．这样的系统有时称为抽样数据系统，变量变化的时刻称为抽样瞬时．离散时间系统也可来源于其它的依据，而不涉及连续动态系统．如下面例 8.2-1 所描述的就是这样的一个离散时间系统．基本上，我们的研究只涉及到抽样数据系统．类似于连续系统的动态用微分方程来描写，离散时间系统的动态是用差分方程来描写的．我们只考察用常差分方程来描写的离散时间系统．

和以前一样，我们把绝大部分注意力集中在线性系统上．因而类似于连续系统，我们将致力于求出离散时间系统的标准状态方程．事实上，首先关心于正常离散时间系统，正如我们将会见到的，它的标准方程具有形式

$$\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{\Phi}_k\mathbf{x}_k+\mathbf{\Delta}_k\mathbf{u}_k \tag{1a}$$

$$\mathbf{y}_k=\mathbf{C}_k\mathbf{x}_k+\mathbf{D}_k\mathbf{u}_k \tag{1b}$$

其中 k 对应于第 k 个样本区间．为了说明此概念，我们首先考察下面的抽样问题：设 $f(t)$ 是 t 的连续函数，并假定我们的目标是计算 $f(t)$ 在某个未来时间 $t+T$ 的值．$f(t)$ 的变化 $\Delta f(t)$，即

$$\Delta f(t)=f(t+T)-f(t) \tag{2}$$

称为对于增量或区间 T 的前向差分[Richardson, 1954]．用迭代可确定高阶差分．例如

$$\begin{aligned}\Delta^2[f(t)]&=\Delta[\Delta f(t)]=\Delta[f(t+T)-f(t)]\\&=\Delta f(t+T)-\Delta f(t)\\&=f(t+2T)-2f(t+T)+f(t)\end{aligned} \tag{3}$$

它可一般化为形式

$$\Delta^n[f(t)]=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}f(t+iT)$$

学生应会验证此公式.

方程(3)是差分方程，就像

$$y(t+2T)+ay(t+T)+by(t)=g(t) \tag{4}$$

一样. 如果我们对方程(4)中变元 t, $t+T$, 及 $t+2T$ 作出标记，记号可被简化如下：一般，变元有结构 t_0+kT, 对于 $k=0,1,\cdots,n$, 其中 t_0 是某个参考起点. 我们有时用缩写

$$y_0=y(t_0), y_1=y(t_0+T), \cdots, y_k=y(t_0+kT)$$

用这样的记号，如果 $k=0$ 且 $t=t_0$ 是参考起点，则方程(4)的缩写形式为

$$y_2+ay_1+by_0=g_0$$

显然，若 $t=t_1$ 是起点，方程(4)成为

$$y_3+ay_2+by_1=g_1$$

如果 $t=t_k$ 是起点，方程(4)的一般形式是

$$y_{k+2}+ay_{k+1}+by_k=g_k \tag{5}$$

通常应用的另一种记号是

$$y(t_{k+1})=y_{k+1}=y(k+1) \tag{6}$$

(6)式中的记号如图 8.2-1 所示。连续函数 $y(t)$ 在抽样时刻 t_{k+2}, t_{k+1} 及 t_k 取值 $y(t_{k+2})$, $y(t_{k+1})$ 及 $y(t_k)$. 值得注意的是方程(4)

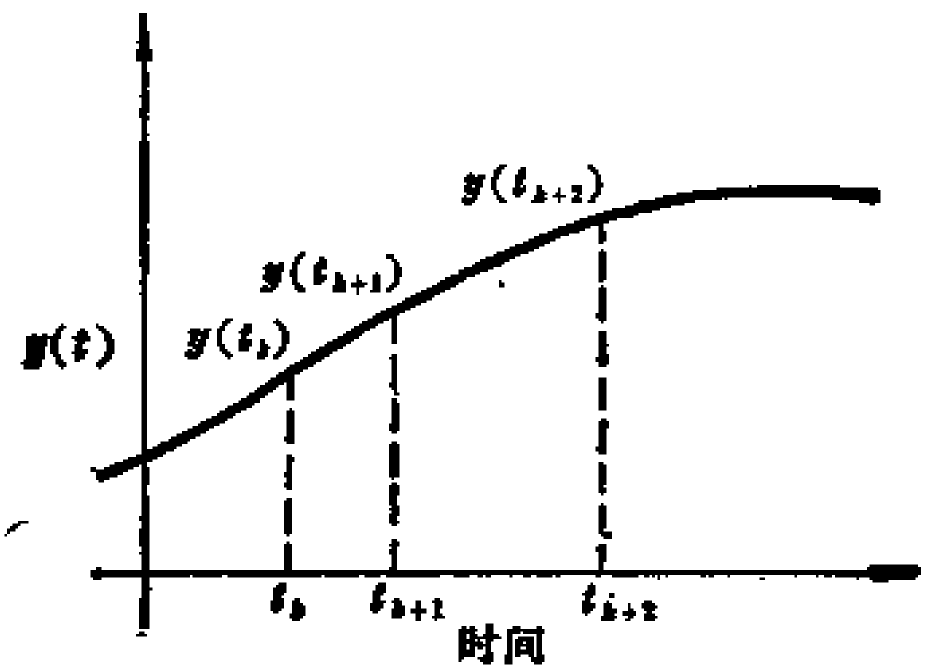


图 8.2-1 连续函数 $y(t)$ 抽样值 $y(t_k)$

中抽样区间T是假定为常数的，即

$$t_{k+2}-t_{k+1}=t_{k+1}-t_k=T \tag{7}$$

在(6)式的记号没有假定抽样区间是相等的．可是在方程(4)的记号中不是这样，那里常数抽样区间T是注明了的．在方程(5)中可能暗示是等抽样区间，也可能不是，因为有时用(6)式的缩写记号表示$y(t)$在时刻$t=t_{k+1}$的值．

用了这种记号，对应于方程(5.3-3)和(5.3-4)的差分方程成为

$$\mathbf{x}(t_{k+1})=\mathbf{f}[\mathbf{x}(t_k),\mathbf{u}(t_k),t_k] \tag{8a}$$

$$\mathbf{y}(t_{k+1})=\mathbf{g}[\mathbf{x}(t_k),\mathbf{u}(t_k),t_k] \tag{8b}$$

利用(6)的记号，这些方程进一步简化为

$$\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{f}(\mathbf{x}_k,\mathbf{u}_k,t_k) \tag{9a}$$

$$\mathbf{y}_{k+1}=\mathbf{g}(\mathbf{x}_k,\mathbf{u}_k,t_k) \tag{9b}$$

这些记号用下例进一步说明．

例8.2-1 为了说明差分方程的一些实际的应用及其可能的来源，我们考察每月投资D元月利率I的问题．设P_k是k个月积累本金总数．则在$k+1$个月总数是

$$P_{k+1}=(1+I)P_k+D \tag{10}$$

其中$k=0,1,\cdots$，及$P_0=D$．

用古典方法[Hildebrand, 1952]求解方程(10)．首先考察齐次方程

$$P_{k+1}-(1+I)P_k=0$$

假设一个解的形式为

$$P_k=Ca^k$$

其中a是待定的常数．代入，求得

$$a^{k+1}-(1+I)a^k=0$$

或

$$a=1+I$$

于是齐次解为

$$P_k=(1+I)^kP_0$$

因为在 $k=0$ 时 $P_0=D$.

为了求完全解，写

$$
\begin{aligned}
P_1 &= (1+I)P_0+D \\
P_2 &= (1+I)P_1+D \\
&= (1+I)^2P_0+(1+I)D+D \qquad (11)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
P_k &= (1+I)^kP_0+\sum_{j=0}^{k-1}(1+I)^jD
\end{aligned}
$$

因为在此问题中 $P_0=D$, (11)式化为

$$P_k=D\sum_{j=0}^{k}(1+I)^j \tag{12}$$

(12)式是几何级数．由上式，我们可得到和式的封闭形式．

$$P_{k+1}-P_k=D(1+I)^{k+1} \tag{13}$$

这就是说，(12)满足差分方程(13)．把(10)式的 P_{k+1} 代入，得

$$(1+I)P_k+D-P_k=D(1+I)^{k+1}$$

或

$$P_k=D\frac{(1+I)^{k+1}-1}{I} \qquad I\neq 0 \tag{14}$$

若令 $D=1$，且以 $1+I=r$ 代入(14)式，得到熟悉的几何级数的和

$$P_k=\frac{1-r^{k+1}}{1-r} \qquad r\neq 1 \tag{15}$$

完全相似于微分算子 $P=\frac{d}{dt}$，我们引入移位算子 E[Richardson, 1954]，用关系式定义为

$$Ef(t+kT)=f[t+(k+1)T]$$

更简略些，

$$Ef_k=f_{k+1} \tag{16}$$

利用此记号，方程(5)可写作

$$E^2y_k+aEy_k+by_k=g_k \tag{17}$$

这里我们用了 $Eay_k=aEy_k$ 这个事实，其中 a 是常数．方程(17)启

发我们把线性差分算子 L 定义为

$$L(E)=a_nE^n+a_{n-1}E^{n-1}+\cdots+a_0 \tag{18}$$

其中 a_i 假定是常数. 算子 $L(E)$ 类似于(4.7-20)定义的线性微分算子 $L(p)$. 在 §8.4 中要利用这种类似性去定义离散时间系统的状态变量.

差分方程的阶根据方程(17)或(18)来定义. (18)定义了一个 n 阶线性差分方程. 类似于 §5.3 的讨论可以把差分方程分类为非线性的, 定常的等等. §5.3 的基本定义可应用于差分方程, 因此这里不再重复. 在那里定义的任何连续系统也都可以看作离散时间系统. 例如, 连续系统的输出可能只在抽样区间上是知道的. 这时, 系统就可看作是抽样数据系统或离散时间系统. 另一个例子是对连续系统的输入是一系列常数. 用下例说明后一种想法.

例 8.2-2 考察如图 8.2-2 所示的 RC 电路. 若 x 是电路上的电荷, 状态方程是

$$\dot{x}=-x+u$$
$$y=x$$

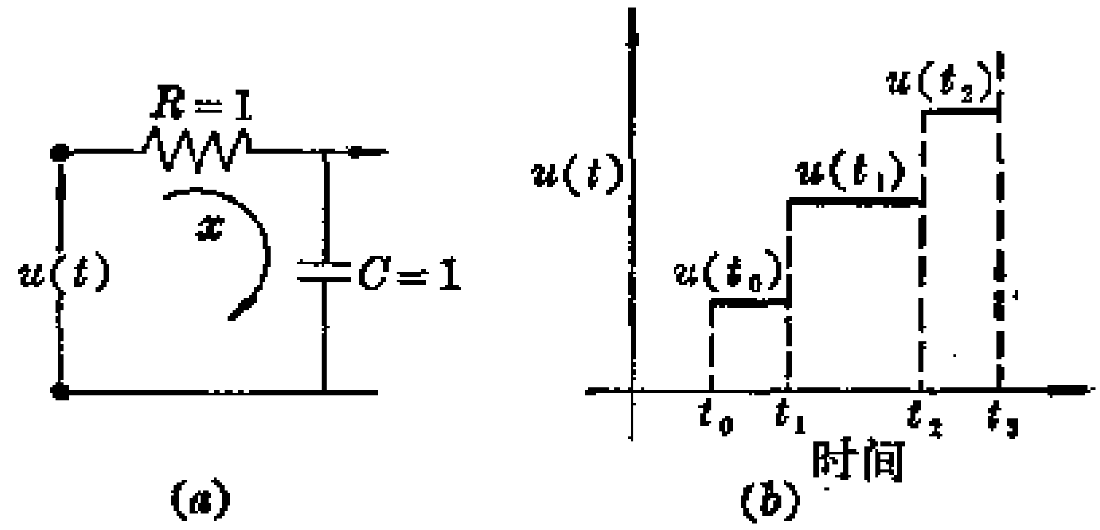


图 8.2-2 (a) RC 网络; (b) 输入 $u(t)$

系统的运动是

$$x(t)=e^{-t}x_0+\int_{t_0}^{t}e^{-(t-\tau)}u(\tau)d\tau \tag{19}$$

现在因为 u 对 $t_k<t\leqslant t_{k+1}$ 是分段常数, 于是有

$$x(t_{k+1})=e^{-(t_{k+1}-t_k)}x(t_k)+(1-e^{-(t_{k+1}-t_k)})u(t_k) \tag{20}$$

其中对于 $0<t-t_k\leqslant t_{k+1}-t_k$, $u(t)=u(t_k)$. 定义

$$\Phi(t_{k+1}, t_k)=e^{-(t_{k+1}-t_k)}$$
$$\Delta(t_{k+1}, t_k)=1-\Phi(t_{k+1}, t_k)$$

于是方程(20)简化为

$$x_{k+1}=\Phi(t_{k+1}, t_k)x_k+\Delta(t_{k+1}, t_k)u_k \tag{21}$$

当然，若对一切 k, $t_{k+1}-t_k=T$, 则得更简单的结果

$$x_{k+1}=\Phi(T)x_k+\Delta(T)u_k \qquad \Phi(T)=\Phi(t_{k+1}-t_k) \tag{22}$$

求函数 $g(x)=0$ 的实根的牛顿迭代法提供了一个非线性差分方程的例子[Wylie, 1966]. 牛顿的递归方程或差分方程是

$$x_{k+1}=x_k-\frac{g(x_k)}{g'(x_k)} \qquad g'(x)=\frac{dg}{dx} \tag{23}$$

一般说来，这是非线性的. 图 8.2-3说明方程(23)，它是直线的点斜式方程. 例如，若 $g(x)=x^2-b$, 则

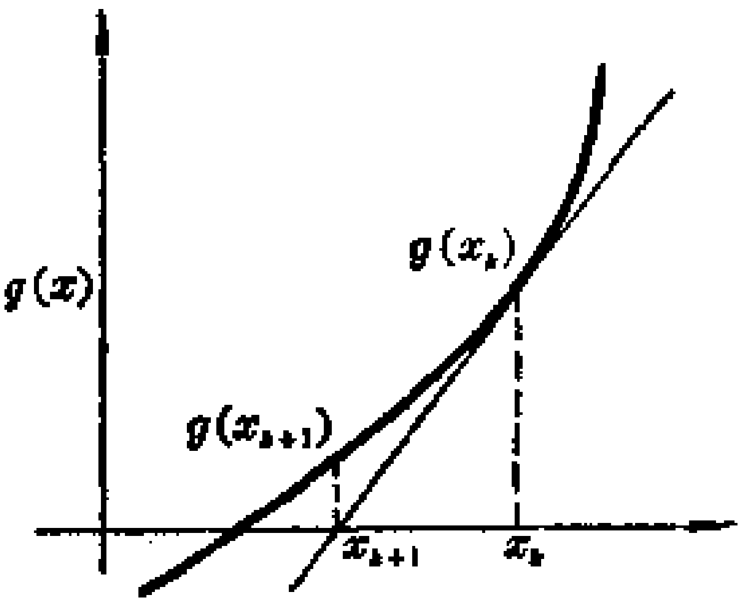


图 8.2-3 牛顿迭代法的说明

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{b}{x_k}\right) \qquad x_k\neq 0 \tag{24}$$

8.3. 抽样数据系统

离散时间控制

例 8.2-2 为得出方程 (8.2-1) 的标准系统提供了启发. 现在考察用标准形式

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u}$$

描述的连续系统. 这个系统的运动已由(5.5-13)给出，为了方便起见，这里重述如下

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{\Phi}(t, t_k)\mathbf{x}(t_k)+\int_{t_k}^{t}\mathbf{\Phi}(t, \xi)\mathbf{B}(\xi)\mathbf{u}(\xi)d\xi \tag{1}$$

今设想输入矢量 $\mathbf{u}$ 在任意时间区间，比如说 $t_k<t\leqslant t_{k+1}$ 上是分段常数．如果我们定义控制分布矩阵是

$$\mathbf{\Delta}(t,t_k)=\int_{t_k}^{t}\mathbf{\Phi}(t,\xi)\mathbf{B}(\xi)d\xi \tag{2}$$

(1)式可写作

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{\Phi}(t,t_k)\mathbf{x}(t_k)+\mathbf{\Delta}(t,t_k)\mathbf{u}(t_k^+) \tag{3}$$

且

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}(t_k^+)\quad t_k<t\leqslant t_{k+1} \tag{4}$$

换言之，$\mathbf{u}$ 在时刻 t_k^+ 取常数值 $\mathbf{u}(t_k^+)$．在时间尺度上，t_k^+ 正是时刻 t_k 右方的时间．通常我们舍去(4)中记号上的+号，简写为

$$\mathbf{u}(t_k)=\mathbf{u}(t_k^+)$$

用以表示 $\mathbf{u}$ 有常数值，如图 8.2-2b 所示．换言之，抽样操作可以认为是发生在区间 $t_k<t<t_{k+1}+\varepsilon$ 上，这里 ε 是任意小正常数．

在方程(3)中令 $t=t_{k+1}$，有

$$\mathbf{x}(t_{k+1})=\mathbf{\Phi}(t_{k+1},t_k)\mathbf{x}(t_k)+\mathbf{\Delta}(t_{k+1},t_k)\mathbf{u}(t_k) \tag{5}$$

定义

$$\mathbf{\Phi}(t_{k+1},t_k)=\mathbf{\Phi}_k \tag{6}$$

$$\mathbf{\Delta}(t_{k+1},t_k)=\mathbf{\Delta}_k \tag{7}$$

且用(8.2-6)的记号，得到标准方程

$$\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{\Phi}_k\mathbf{x}_k+\mathbf{\Delta}_k\mathbf{u}_k \tag{8a}$$

离散时间输出方程成为

$$\mathbf{y}_k=\mathbf{C}_k\mathbf{x}_k+\mathbf{D}_k\mathbf{u}_k \tag{8b}$$

如果系统是时不变的且抽样区间是常数，方程(8)可略加简化．那就是说，对一切 k，令 $t_{k+1}-t_k=T$．于是对定常系统

$$\mathbf{\Phi}(t_{k+1},t_k)=\mathbf{\Phi}(t_{k+1}-t_k)=\mathbf{\Phi}(T) \tag{9}$$

且因

$$\mathbf{\Delta}(t_{k+1},t_k)=\left[\int_{t_k}^{t_{k+1}}\mathbf{\Phi}(t_{k+1}-\xi)d\xi\right]\mathbf{B}$$

$$=\Delta(t_{k+1}-t_k)=\Delta(T) \tag{10}$$

于是标准表示式是

$$\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{\Phi}(T)\mathbf{x}_k+\mathbf{\Delta}(T)\mathbf{u}_k \tag{11a}$$

$$\mathbf{y}_k=\mathbf{C}\mathbf{x}_k+\mathbf{D}\mathbf{u}_k \tag{11b}$$

我们得出方程 (8)和(11) 是利用了系统是受控制或受激励于分段常数输入或控制矢量 $\mathbf{u}$ 的假定. 这样的控制系统的例子是很多的. 作为例证，我们考察一个连续系统由数字计算机得到输入的受控情况. 数字计算机的输出仅仅是数码，它只能在抽样瞬时是可得到的. 这就是说，数字计算机一般说来是按照某种指令在特定的瞬时输出数. 然后为了激励连续系统，这些数转换为合适的输入信号. 这样的装置如图 8.3-1 所示.

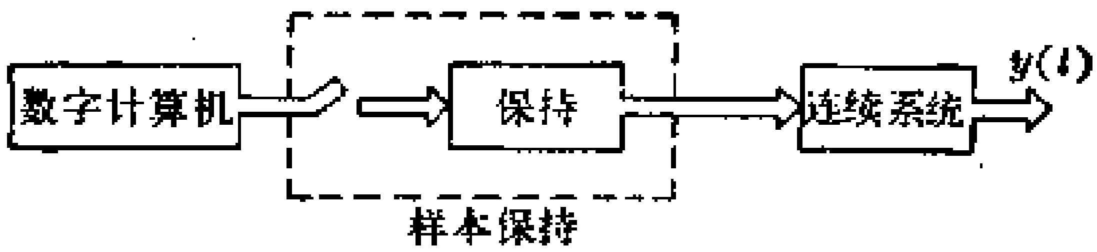


图 8.3-1 计算机控制的连续系统的方框图

样本保持元件描述计算机的抽样，而保持元件描写"平滑的"滤波器[Tou, 1959]. 如前所注意到的，当离散元件(例如，数字计算机)的输出用来控制连续时间系统时，样本保持元件是需要的. 有时，这样的元件称为数字到模拟转换器.

在推导离散时间系统的标准方程中，我们已经隐含假定了一个完全零阶保持. 用记号表示，具有输入 u 的完全零阶样本保持元件的输出是

$$u(t_k)=u(t_k+\tau) \qquad t_k<\tau\leqslant t_{k+1} \tag{12}$$

这正好是由 (4) 式推出的定义. 不完全保持元件在整个保持区间内将不能保持一个定常信号. 用符号表示，不完全保持可取为形式[Kalman 和 Bertran, 1959]

$$u(t_k+\tau)=\exp\left(\frac{\tau}{T_s}\right)u(t_k) \quad t_k<\tau\leqslant t_{k+1} \tag{13}$$

显然，标准方程可以调整到适应不完全保持元件．还有许多其它的保持元件，其中一些在关于抽样系统的文献中讨论过．例如参看杜[1959]及拉加津和富兰克林[1958]．

抽样

假设一个固定抽样区间后，对定常系统可建立方程(11)．此外，隐含假定了(并不必须如此)一切控制变量 $u_1, u_2, \cdots$(控制矢量 $\mathbf{u}$ 的元素)是以同步方式抽样的．我们证明(4)式，更准确些是(12)式的记号对包含各种抽样操作是足够一般的．为了说明这一点，考察输入列向量 $\mathbf{u}=[u_1\ \ u_2]^T$，这里 u_1 和 u_2，比如说，是从图 8.3-1 的数字计算机来的抽样值．在图 8.3-1，双线表示 u_1 和 u_2 的"矢量流"输入"保持元件方框"中．从保持元件方框出发的双线表示描述在图 8.3-1 中的控制信号．

如图 8.3-2 所指出的，控制变量 u_2 是在等时间区间 T 的抽样，然而控制变量 u_1 是在随机时间 t_1, t_2, t_4, t_6 等等的抽样．显然，方程(3)描述了系统在合适的时间区间上的运动，例 8.3-1 给出一个例证．一般说来，我们认为方程(3)不仅描写时变系统也描写定常系统．对于定常系统可用记号

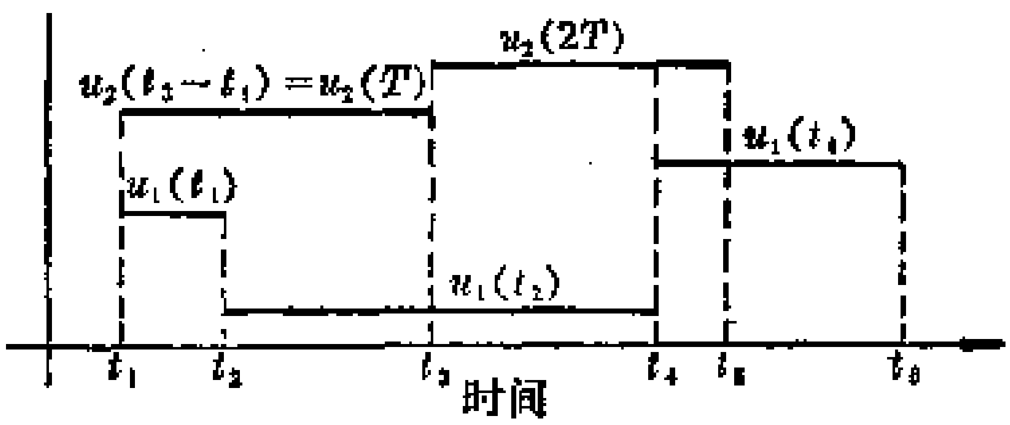


图 8.3-2　控制信号 u_1 和 u_2(完全保持元件)

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{\Phi}(t-t_k)\mathbf{x}(t_k)+\mathbf{\Delta}(t-t_k)\mathbf{u}(t_k) \tag{14}$$

来明显地表出系统是定常的．然而我们还是宁可用(3)式的一般

的记号.

抽样操作经常使用于包括异步的、多速的、随机的及其它的控制系统[Kalman 和 Bertram, 1959]. 为了用符号确定这些操作，设 t_k 是第 k 个抽样瞬时，所以第 k 个抽样区间是

$$T_k = t_{k+1} - t_k \tag{15}$$

常规抽样定义为一切抽样操作是同步完成的且对一切 k 有 $T_k = T$. 异步抽样定义为一切抽样操作以同样速率但在不同的瞬时发生，如图 8.3-3 所描述的. 用符号表示，若 t_k 与 t'_k 表示两个不同取样器的抽样瞬时，则 $t'_k = t_k + c$，这里 c 是正常数. 在随机抽样操作中，t_k 和 T_k 都是随机变量. 多速抽样只是两个或多个取样器操作在固定但不同的区间上的情况.

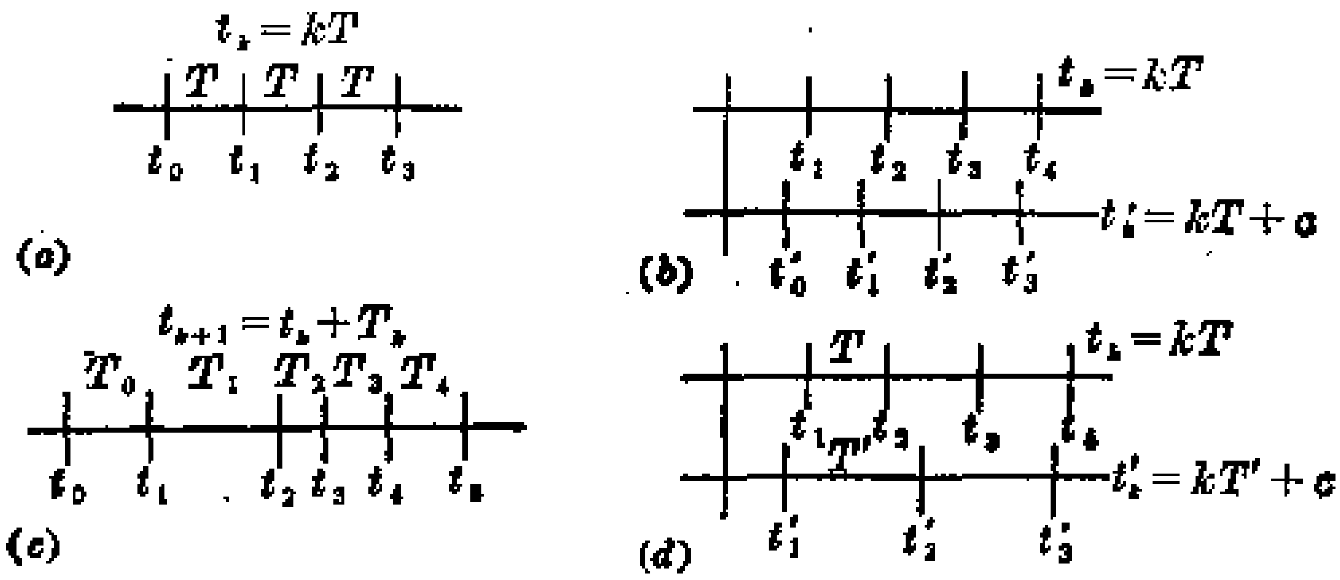


图 8.3-3 一些抽样操作的例子. (*a*) 常规的(常速的); (*b*) 异步的; (*c*) 随机的; (*d*) 多速的

例 8.3-1 考察图 8.3-4 所示的系统. 其中有两个样本保持元件(SHE). 取样器 1 是有抽样区间为 T 秒的常规取样器. 取样器 2 也是常规取样器，但是它的抽样区间为 $\frac{T}{2}$ 秒.

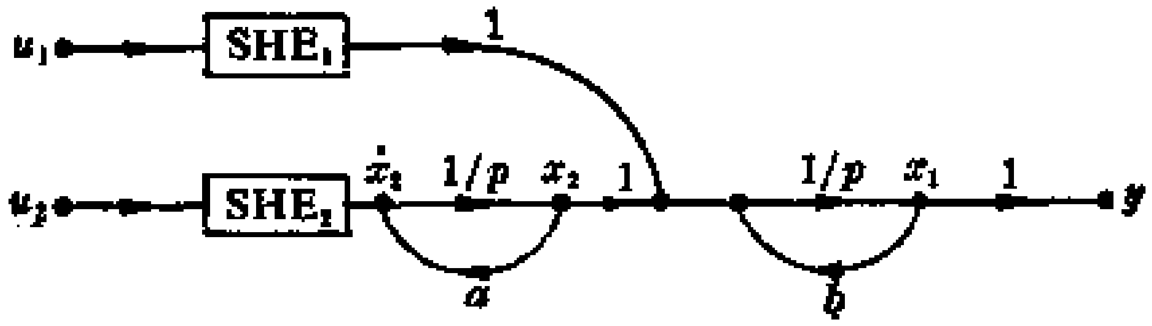


图 8.3-4 多速抽样的例子

连续系统的状态方程是

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b & 1\\ 0 & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

或

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{u}$$

假设这两个取样器都开始于 t_0，有

$$\mathbf{x}_1=\boldsymbol{\Phi}\left(\frac{T}{2}\right)\mathbf{x}_0+\boldsymbol{\Delta}\left(\frac{T}{2}\right)\mathbf{u}(t_0)\qquad 0<t-t_0\leqslant t_1-t_0=\frac{T}{2}$$

其中

$$\mathbf{u}(t_0)=[u_1(t_0^+)\quad u_2(t_0^+)]^T$$

其次

$$\mathbf{x}_2=\boldsymbol{\Phi}\left(\frac{T}{2}\right)\mathbf{x}_1+\boldsymbol{\Delta}\left(\frac{T}{2}\right)\mathbf{u}(t_1)\qquad 0<t-t_1\leqslant t_2-t_1=\frac{T}{2}$$

其中

$$\mathbf{u}(t_1)=[u_1(t_1^+)\quad u_2(t_1^+)]^T$$

对 $\mathbf{x}_3$，有

$$\mathbf{x}_3=\boldsymbol{\Phi}\left(\frac{T}{2}\right)\mathbf{x}_2+\boldsymbol{\Delta}\left(\frac{T}{2}\right)\mathbf{u}(t_2)\qquad 0<t-t_2\leqslant t_3-t_2=\frac{T}{2}$$

其中

$$\mathbf{u}(t_2)=[u_1(t_2^+)\quad u_2(t_2^+)]^T$$

结合上面三个方程，可以求得用 $\mathbf{x}_0$ 表示的 $\mathbf{x}_3$，即

$$\mathbf{x}_3=\boldsymbol{\Phi}\left(\frac{3T}{2}\right)\mathbf{x}_0+\boldsymbol{\Phi}(T)\boldsymbol{\Delta}\left(\frac{T}{2}\right)\mathbf{u}(t_0)+\boldsymbol{\Phi}\left(\frac{T}{2}\right)\boldsymbol{\Delta}\left(\frac{T}{2}\right)\mathbf{u}(t_1)+\boldsymbol{\Delta}\left(\frac{T}{2}\right)\mathbf{u}(t_2)$$

输出抽样

所述的任一抽样操作可以用在控制变量上，如上面所讨论的，或在输出变量上，或在控制变量与输出变量二者上．在某些情况中，一个连续时间系统可离散化，因为它的输出是抽样的或者只是在时间的离散点观测的．我们再次考察方程(8.2-1)的系统，但这时假定 $\mathbf{y}(t)$只是在离散时刻 t_1，t_2，…，t_k 测量的结果是可得到的．那就是说，系统的输出只在时间的离散点抽样，因而输出方程

实际上化为

$$\mathbf{y}_k=\mathbf{C}_k\mathbf{x}_k+\mathbf{D}_k\mathbf{u}_k \tag{16}$$

这是一种普遍的情况，经常出现在估计理论中．在估计理论中，连续系统的输出是抽样的，因而问题是确定或估计在抽样瞬时系统的状态．所以问题的样本数据性质来源于抽样输出而不是由于控制矢量的离散时间性质．在这样的情况下，用矢量 $\mathbf{n}(t)$表示方程(1)中的积分是方便的，以致方程(1)化为

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{\Phi}(t,t_k)\mathbf{x}(t_k)+\mathbf{n}(t) \tag{17}$$

这里对 $\mathbf{u}$ 未作任何假定．下面的例子说明上面的思想．

例 8.3-2 考察系统

$$\dot{z}=\lambda z+\varepsilon$$

其中 ε 是常数．系统的输出是在时刻 t_1 及 t_2 测量(抽样)的，因而要求由这些离散的测量决定 z_0 及 ε．换言之，输出只在离散时间是已知的，所以

$$y_k=z_k \quad k=1,2.$$

在解决这个问题中，我们也说明如 § 4.8 指出的增广系统的应用［参看方程(4.8-11)］．增广系统定义为

$$\begin{bmatrix}\dot{z}\\ \dot{\varepsilon}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z\\ \varepsilon\end{bmatrix}$$

令 $\mathbf{x}=[z \quad \varepsilon]^T$，有

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{F}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{y}_k=\mathbf{C}\mathbf{x}_k$$

$$\mathbf{C}=[1 \quad 0]$$

运动 $\mathbf{x}$ 由

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{\Phi}(t,t_k)\mathbf{x}(t_k)$$

给出，其中

$$\mathbf{\Phi}(t,t_k)=e^{\mathbf{F}(t-t_k)}=\begin{bmatrix}e^{\lambda(t-t_k)} & -\frac{1}{\lambda}[1-e^{\lambda(t-t_k)}]\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

现在由下列方程解出 $\mathbf{x}_0$：

$$y_1=\mathbf{C}\mathbf{x}_1=\mathbf{C}\mathbf{\Phi}(t_1)\mathbf{x}_0$$

$$y_2 = \mathbf{C}\mathbf{x}_2 = \mathbf{C}\mathbf{\Phi}(t_2, t_1)\mathbf{x}_1 = \mathbf{C}\mathbf{\Phi}(t_2)\mathbf{x}_0.$$

这里为方便计令 $t_0=0$. 在作了适当的运算后得到

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t_1} & -\frac{1}{\lambda}(1-e^{\lambda t_1}) \\ e^{\lambda t_2} & -\frac{1}{\lambda}(1-e^{\lambda t_2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

求解这组方程导出解

$$z_0 = -\frac{1-e^{\lambda t_2}}{\lambda\Delta} y_1 + \frac{1-e^{\lambda t_1}}{\lambda\Delta} y_2$$

$$\varepsilon = -\frac{e^{\lambda t_2}}{\Delta} y_1 + \frac{e^{\lambda t_1}}{\Delta} y_2$$

其中

$$\Delta = \frac{1}{\lambda}(e^{\lambda t_2} - e^{\lambda t_1})$$

我们现在把注意力转到差分方程的基本方面.

8.4. 差分方程

由差分方程描写的系统可以用和该系统的连续模拟系统非常相同的方法来处理. 我们将说明 §4.7 的方法只要稍加修改就可用于离散时间系统. 我们已经看到如何从连续系统的微分方程导出抽样数据系统的状态方程. 因而在这一节里我们的注意力是指向由差分方程给出的动态系统, 而不是微分方程. 今从考察离散时间"积分器"的状态变量开始. 使用这个术语是由于 (8.2-18) 和 (4.7-20) 所定义的算子之间的相似性. 比较这两个式子可看出移位算子 E 起着算子 p 的作用. 当讨论连续系统时我们用方程

$$(p+a)y = u$$

定义了一个积分器. 类似地, 我们用方程

$$(E+a)x_k = u_k \tag{1a}$$

$$y_k = x_k \tag{1b}$$

定义离散时间"积分器", 其中 a 是常数. 此系统的阶数是 1, 和以

前一样，一个变量足以描述它的状态．方程(1)可写作

$$x_{k+1}=-ax_k+u_k \tag{2a}$$

$$y_k=x_k \tag{2b}$$

方程(2)给出类似于方程(4.7-29)的离散时间积分器的状态方程．随着这个相似性的建立，我们可利用 §4.7 的结果写出差分方程的状态方程．作为例证，考察由线性差分方程

$$L(E)y_k=u_k \tag{3}$$

描述的单输入单输出系统．或更明确些：

$$a_n y_{n+k}+a_{n-1}y_{n+k-1}+\cdots+a_0 y_k=u_k \tag{4}$$

如在 §4.7[参看(4.7-22)]，定义状态变量如下：

$$\begin{aligned} x_1(k)&=y_k\\ x_2(k)&=y_{k+1}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_n(k)&=y_{n+k-1} \end{aligned} \tag{5}$$

这里为了方便使用记号 $x_i(t_k)=x_i(k)$．移位每个 $x_i(k)$，即作运算 $Ex_i(k)=x_i(k+1)$，有

$$\begin{aligned} x_1(k+1)&=y_{k+1}=x_2(k)\\ x_2(k+1)&=y_{k+2}=x_3(k)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_n(k+1)&=y_{n+k}=-\frac{1}{a_n}[a_0x_1(k)+\cdots+a_{n-1}x_n(k)]+\frac{u_k}{a_n} \end{aligned} \tag{6}$$

写这些方程为矩阵方程，得

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1)\\ x_2(k+1)\\ \vdots\\ x_n(k+1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -\frac{a_0}{a_n} & \cdots & \cdots & \cdots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k)\\ x_2(k)\\ \vdots\\ x_n(k) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ \frac{u_k}{a_n} \end{bmatrix}$$

把它可缩写成

$$\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{F}\mathbf{x}(k)+\mathbf{G}\mathbf{u}(k) \tag{7}$$

与已建立的记号相一致，也可写成

$$\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{F}\mathbf{x}_k+\mathbf{G}\mathbf{u}_k \tag{8a}$$

$$\mathbf{y}_k=\mathbf{C}\mathbf{x}_k \tag{8b}$$

用下列例子说明在 §4.7 中建立的另一方法.

例 8.4-1 差分方程

$$(a_2E^2+a_1E+a_0)y_k=(b_2E^2+b_1E+b_0)u_k$$

可类似于图 4.7-8 描述的方法用矢量记号改写，求得状态方程

$$x_1(k+1)=x_2(k)$$

$$x_2(k+1)=-\frac{1}{a_2}[a_1x_2(k)+a_0x_1(k)]+\frac{u(k)}{a_2}$$

输出方程是

$$y(k)=\left(b_0-\frac{a_0b_2}{a_2}\right)x_1(k)+\left(b_1-\frac{a_1b_2}{a_2}\right)x_2(k)+\frac{b_2}{a_2}u(k)$$

此式由图 4.7-8 及(4.7-63)式得出的. 写成矩阵记号，有

$$\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{F}\mathbf{x}_k+\mathbf{G}\mathbf{u}_k$$

$$\mathbf{y}_k=\mathbf{C}\mathbf{x}_k+\mathbf{D}\mathbf{u}_k$$

其中

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{a_0}{a_2} & -\dfrac{a_1}{a_2}\end{bmatrix} \qquad \mathbf{G}=\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{a_2}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}b_0-\dfrac{a_0b_2}{a_2} & b_1-\dfrac{a_1b_2}{a_2}\end{bmatrix} \qquad \mathbf{D}=\begin{bmatrix}\dfrac{b_2}{a_2}\end{bmatrix}$$

当然，我们可以继续说明在 § 4.7 中讨论过的其它技巧，然而似乎没有必要，因为步骤现在是清楚的.

8.5. 矩阵差分方程的解

如 §5.5 一样，我们只考察线性系统，特别是把注意力集中于方程

$$\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{\Phi}_k\mathbf{x}_k+\mathbf{\Delta}_k\mathbf{u}_k \tag{1}$$

首先，考察自由系统

$$\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{\Phi}_k\mathbf{x}_k \tag{2}$$

且令 $k=0,1,\cdots$, 逐次有

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}_1=\mathbf{\Phi}_0\mathbf{x}_0\\
&\mathbf{x}_2=\mathbf{\Phi}_1\mathbf{x}_1=\mathbf{\Phi}_1\mathbf{\Phi}_0\mathbf{x}_0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\mathbf{x}_{k+1}=\prod_{i=0}^{k}\mathbf{\Phi}_i\mathbf{x}_0
\end{aligned} \tag{3}$$

方程(3)给出起始于初态 x_0 的系统的自由运动. 如果系统是定常的,且抽样区间是常数,方程(2)有解

$$\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{\Phi}^k\mathbf{x}_0 \tag{4}$$

(把此解与例 8.2-1 的齐次解相比较.)

现在假设离散时间系统是抽样数据系统, 它的转移矩阵满足由(5.5-10)确定的性质. 则有解

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}_1=\mathbf{\Phi}(t_1,t_0)\mathbf{x}_0\\
&\mathbf{x}_2=\mathbf{\Phi}(t_2,t_1)\mathbf{x}_1=\mathbf{\Phi}(t_2,t_0)\mathbf{x}_0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\mathbf{x}_k=\mathbf{\Phi}(t_k,t_0)\mathbf{x}_0
\end{aligned} \tag{5}$$

如果系统是定常的,抽样区间是常数,可利用(8.3-9)的结果写为

$$\mathbf{x}_k=\mathbf{\Phi}(kT)\mathbf{x}_0 \tag{6}$$

其中 T 是抽样区间. 如(4)式所指出的, (6)式也可写作

$$\mathbf{x}_k=\mathbf{\Phi}^k(T)\mathbf{x}_0 \tag{7}$$

一般, 我们省略显然的抽样区间 T 而采用(4)式的记号.

现在考察由方程(1)定义的强迫系统,其中 $\mathbf{\Phi}_k=\mathbf{\Phi}$, $\mathbf{\Delta}_k=\mathbf{\Delta}$. 对于这样的定常系统,有解

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}_1=\mathbf{\Phi}\mathbf{x}_0+\mathbf{\Delta}\mathbf{u}_0\\
&\mathbf{x}_2=\mathbf{\Phi}\mathbf{x}_1+\mathbf{\Delta}\mathbf{u}_1
\end{aligned}$$

$$=\Phi[\Phi \mathbf{x}_0+\Delta \mathbf{u}_0]+\Delta \mathbf{u}_1$$

························

$$\mathbf{x}_k=\Phi^k \mathbf{x}_0+\sum_{i=0}^{k-1}\Phi^i \Delta \mathbf{u}_{k-i-1} \tag{8a}$$

$$=\Phi^k \mathbf{x}_0+\sum_{i=0}^{k-1}\Phi^{k-i-1} \Delta \mathbf{u}_i \tag{8b}$$

比较方程(8)与方程(8.3-1)，看出连续系统的积分对应着离散系统的和式．事实上，在有限差分中[Richardson, 1954]，人们试图对和式求出封闭形式的解就像积分学中作积分一样．这里将不涉及这个内容，因为它本身就是一门课程．然而，注意到在例 8.2-1 对于和式实际上我们求出了封闭形式的解 [Hildebrand, 1952]．比较方程(8*a*)与(8.3-1)，使人联想到，类似于连续系统的加权函数可把序列 $\Delta, \Phi\Delta, \cdots, \Phi^{k-1}\Delta$ 定义为加权序列．因此，若加权序列定义为

$$\mathbf{W}_n=\Phi^n \Delta$$

可写

$$\mathbf{x}_k=\Phi^k \mathbf{x}_0+\sum_{i=0}^{k-1}\mathbf{W}_i \mathbf{u}_{k-i-1} \tag{9a}$$

$$\mathbf{x}_k=\Phi^k \mathbf{x}_0+\sum_{i=0}^{k-1}\mathbf{W}_{k-i-1} \mathbf{u}_i \tag{9b}$$

这些关系式的右端表示"卷积和"，它类似于连续时间系统的卷积积分．

8.6. *z* 变换

我们引入 *z* 变换主要是为了完善连续系统与离散时间系统之间的类比．抽样数据系统分析使用 *z* 变换技巧可以看作是经典方法，因为这是较有力的状态空间方法．我们将要在下面指出分析

的 z 变换方法的局限性. z 变换是用于解差分方程的一种算子，它类似于拉氏变换. 事实上，如果回想一下函数 $f(t)$ 的拉氏变换定义为[Wglie, 1966]

$$F(s) \triangleq \mathscr{L}[f(t)] \triangleq \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \tag{1}$$

以及在差分方程理论中积分化为和式，从逻辑上看来数列 $f_i(i=0,1,2,\cdots)$ 的 z 变换应定义为

$$\mathscr{Z}[f_i] \triangleq F(z) \triangleq \sum_{i=0}^{\infty} f_i z^{-i} \tag{2}$$

z 变换紧密地联系着拉氏变换. 事实上，z 变换可由拉氏变换得到，如在拉加津和富兰克林[1958]中所证明的那样. 就像拉氏变换那样，已编出广泛的 z 变换表(变换对). 在下面的例子中要推出以后工作中用到的一些特殊变换式(参看附录 III).

例 8.6-1 常数函数 f

$$f_i = f \quad 对于\ i=0, 1, \cdots, k$$

的 z 变换可利用例 8.2-1 的结果求出. 在那里对于几何级数建立了关系式[参看(8.2-15)式]

$$\sum_{i=0}^{k} r^i = \frac{1-r^{k+1}}{1-r}$$

若 k 无限增大，且设 $r<1$，有

$$\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r} \qquad r<1 \tag{3}$$

利用公式(3)可求得 f 的 z 变换：即

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}[f] &= \sum_{i=0}^{\infty} f z^{-i} \\ &= \lim_{i\to\infty} f \frac{1-\left(\frac{1}{z}\right)^{i+1}}{1-\frac{1}{z}}\end{aligned}$$

$$=f\frac{z}{z-1} \qquad 当\left|\frac{1}{z}\right|<1 \tag{4}$$

计算 f^n 的 z 变换也是一件容易的事情，有

$$\mathscr{Z}[f^n]=\sum_{i=0}^{\infty}f^i z^{-i}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{f}{z}\right)^i=\frac{z}{z-f} \qquad 对于\left|\frac{f}{z}\right|<1$$

现在说明 z 变换在解矩阵差分方程上的应用。假设我们考察方程(8.5-8)的系统。首先考察自由运动

$$\mathbf{x}_k=\mathbf{\Phi}^k\mathbf{x}_0 \tag{5}$$

利用(3)式及 $\mathbf{r}=z^{-1}\mathbf{\Phi}$，有

$$\mathscr{Z}[\mathbf{x}_k]=\mathscr{Z}[\mathbf{\Phi}^k\mathbf{x}_0]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{\Phi}^k z^{-k}\mathbf{x}_0 \tag{6}$$

$$=\lim_{k\to\infty}(\mathbf{I}-z^{-1}\mathbf{\Phi})^{-1}[\mathbf{I}-(z^{-1}\mathbf{\Phi})^{k+1}]\mathbf{x}_0 \tag{7}$$

此式化为

$$\mathscr{Z}[\mathbf{x}_k]=(\mathbf{I}-z^{-1}\mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{x}_0 \tag{8}$$

如果

$$\lim_{k\to\infty}(z^{-1}\mathbf{\Phi})^{k+1}=0 \tag{9}$$

或者，当

$$\|z^{-1}\mathbf{\Phi}\|<1 \tag{10}$$

时也是一样的。

在计算强迫响应的 z 变换之前，我们建立一些熟知的结果。首先，

$$\mathscr{Z}[f_{n+1}]=\sum_{n=0}^{\infty}f_{n+1}z^{-n}$$

$$=z\sum_{n=0}^{\infty}f_{n+1}z^{-(n+1)}$$

$$=z\sum_{k=1}^{\infty}f_k z^{-k}=zF(z)-zf_0 \tag{11}$$

其次，要证明离散时间"卷积"对应于变换式乘法．考察关系式

$$\mathbf{x}_n=\sum_{i=-\infty}^{n}\mathbf{W}_{n-i}\mathbf{u}_i \tag{12}$$

其中 $i=-\infty$ 意味着我们考察的是无限的过去．(12)的 z 变换是

$$\mathscr{Z}[\mathbf{x}_n]=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=-\infty}^{n}\mathbf{W}_{n-i}\mathbf{u}_i\right)z^{-n} \tag{13}$$

作足标变换 $k=n-i$，并先对 n 作加法，得

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{W}_k z^{-k}\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{u}_{n-k}z^{k-n} \tag{14}$$

右边的和式是 u_n 的 z 变换式，左边和式是 $\mathbf{W}_n$ 的 z 变换式．用记号表示，有

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}[\mathbf{x}_n]&=\mathscr{Z}[\mathbf{W}]\mathscr{Z}[\mathbf{u}]\\&=\mathbf{W}(z)\mathbf{u}(z)\end{aligned} \tag{15}$$

显然，(15)式类似于拉氏变换中得到的变换式乘法的结果．

我们需要进一步的结果：

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}[f_{n-1}]&=\sum_{n=0}^{\infty}f_{n-1}z^{-n}\\&=z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}f_{n-1}z^{-(n-1)}\\&=z^{-1}F(z)+f_{-1}\end{aligned} \tag{16}$$

利用(15)与(16)的结果甚易得到方程(8.5-9a)的系统的强迫响应的 z 变换式．我们有

$$\mathscr{Z}[\mathbf{x}_k]=\mathscr{Z}[\mathbf{\Phi}^k\mathbf{x}_0]+\mathscr{Z}[\mathbf{f}_{k-1}] \tag{17}$$

其中

$$\mathbf{f}_{k-1}=\sum_{i=0}^{k-1}\mathbf{W}_i\mathbf{u}_{k-i-1} \tag{18}$$

利用(8)与(16)的结果，有(令 $\mathbf{f}_{-1}=0$)

$$\mathscr{Z}[\mathbf{x}_k]=(\mathbf{I}-z^{-1}\mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{x}_0+z^{-1}\mathscr{Z}[\mathbf{f}_k]$$

由(15)，得

$$\mathscr{Z}[\mathbf{f}_k]=\mathbf{W}(z)\mathbf{u}(z)$$

其中

$$\mathbf{W}(z)=\mathscr{Z}[\mathbf{\Phi}^n\mathbf{\Delta}]$$
$$=(\mathbf{I}-z^{-1}\mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Delta}$$

所以(8.5-9a)的 z 变换式是

$$\mathbf{x}(z)=(\mathbf{I}-z^{-1}\mathbf{\Phi})^{-1}(\mathbf{x}_0+z^{-1}\mathbf{\Delta}\mathbf{u}(z)) \tag{19}$$

读者应把(19)与(5.7-15)相比较．在习题 8.31 中提供了得到(19)的其它更直接的方法．还有由杜[1964]提供的另外的方法．作增广系统

$$\begin{bmatrix}\mathbf{x}_{n+1}\\ \hdashline \mathbf{u}_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{\Phi} & \mathbf{\Delta}\\ \hdashline \mathbf{0} & \mathbf{F}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_n\\ \hdashline \mathbf{u}_n\end{bmatrix} \tag{20}$$

其中 $\mathbf{F}$ 是输入过程的转移矩阵．那就是说，$\mathbf{F}$ 由关系式

$$\mathbf{u}_{n+1}=\mathbf{F}\mathbf{u}_n \tag{21}$$

定义．方程(20)有形式

$$\mathbf{y}_{n+1}=\mathbf{H}\mathbf{y}_n \tag{22}$$

现在按照公式(8)有

$$\mathscr{Z}[\mathbf{y}_n]=(\mathbf{I}-z^{-1}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{y}_0 \tag{23}$$

如果(23)中的矩阵的逆可以根据方程(20)中的分块矩阵来分块，然后如果把(23)展开，就得到(19)的 z 变换式．详细论证留给读者．

这里结束了 z 变换的简略的讨论. 我们已经非常简略地说明了它们如何应用，此外还建立了一些与拉氏变换类似的公式. 当然，就像拉氏变换一样，z 变换限用于定常系统. 这个限制比开始时估计的要严. 例如，z 变换只对常规抽样，即固定抽样区间是有用的. 其次，当利用这个基础理论时，系统的状态仅在抽样瞬时是可得到的. 例 8.3-1 中讨论过的方法是多方面适用的，且可用以求解更多种类的问题. 例 8.3-1 的问题能容易地设计数字计算机程序，而利用 z 变换公式陈述问题时是麻烦的. 当然，如果抽样不是常规的，z 变换是用处不大的.

8.7. 稳定性研究

这一节里的定义和第六、第七两章中的那些定义是相同的，许多定理也是一样. 尽管如此，我们还是在这里分别给予简略的介绍，以说明关于抽样数据系统平衡状态与稳定性的概念. 因此，我们重述一些而非全部第六、七章提出的定义和定理. 我们的目的是说明如何应用第六、七章中的概念于抽样数据系统，而不是重述每一个定理和在那里介绍的例证.

平衡状态

为了研究抽样数据系统的运动，先从自治系统

$$\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \tag{1}$$

开始，其中 $k=0,1,2,\cdots$，对于 $k=0$ 定义 $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$ 为

$$\mathbf{x}_1=\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\triangleq\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$$

再一次迭代导出

$$\mathbf{x}_2=\mathbf{f}(\mathbf{x}_1)=\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)]\triangleq\mathbf{F}^2(\mathbf{x}_0) \tag{2}$$

记号 $\mathbf{F}^2(x_0)$只是为了方便，而不是表示函数 $\mathbf{F}$ 的平方. 推广(2)式的记号，于是

$$\mathbf{x}_n=\mathbf{F}^n(\mathbf{x}_0) \tag{3}$$

表示"解"或更准确些是 $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$ 的 n 次迭代.

如果我们加一控制矢量 $\mathbf{u}$ 于方程(1),我们有差分方程

$$\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \tag{4}$$

为了得到过程的平衡解或平衡状态,令 $\mathbf{u}_k=\mathbf{c}$ 为常矢量. 任何满足方程

$$\mathbf{x}_e=\mathbf{f}(\mathbf{x}_e, \mathbf{c}) \tag{5}$$

的矢量 $\mathbf{x}_e$ 称为平衡状态. 如果系统开始于平衡状态 $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_e$, 则由(3)有

$$\mathbf{x}_e=\mathbf{F}^n(\mathbf{x}_e, \mathbf{c})$$

考察下面的例子.

例 8.7-1 差分方程(参看例 8.2-1)

$$P_{k+1}=(1+I)P_k+D$$

的平衡状态是

$$P_e=(1+I)P_e+D$$

$$=\frac{D}{-I}=\frac{D}{1-r}$$

方程(8.2-24)的平衡状态是

$$x_e=\frac{1}{2}\left(x_e+\frac{b}{x_e}\right)$$

$$x_e=\pm b^{\frac{1}{2}}$$

稳定性

如同在第六、七章中,我们为了定义稳定性概念考察了关于平衡状态的微小扰动. 粗略地说, 如果系统的微小扰动在平衡状态引起相应的微小偏差,则系统就是稳定的. 在控制系统中,一般希望系统随着时间增长回到平衡状态. 如果这种情况发生, 我们说系统是渐近稳定的, 或者更正确地说平衡状态是渐近稳定的. 上面的思想可正式推广为下列定义.

定义 8.7-1 (I) 方程(4)的平衡状态 $\mathbf{x}_e$ 是稳定的,如果对于

任何 $\varepsilon>0$ 若存在相应的 $\delta(\varepsilon,t_0)=\delta>0$ 使得

$$\|\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_e\|\leqslant\delta \tag{6}$$

则

$$\|\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_e\|<\varepsilon \tag{7}$$

(II) 平衡状态是渐近稳定的，如果它是稳定的，且

$$\lim_{k\to\infty}\|\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_e\|=0 \tag{8}$$

(III) 平衡状态是一致稳定的，如果 δ 与 t_0 无关.

(IV) 如果解是渐近稳定的且 δ 可以任意大，则平衡状态是大范围渐近稳定的(全局稳定的或完全稳定的).

在考察稳定性的特殊情况之前，我们在下例中说明上面的定义.

例 8.7-2 考察由方程(8.2-24)所描述的系统，即为了得到数 $b=c^2$ 的平方根的牛顿递推法. 如在例 8.7-1 所说明的，平衡状态是 $x_e=c>0$. 为了检验这个状态的稳定性，我们观察

$$\begin{aligned}x_{k+1}-c&=\frac{1}{2}\left(x_k-2c+\frac{c^2}{x_k}\right)\\&=\frac{1}{2}(x_k-c)\left(1-\frac{c}{x_k}\right)\end{aligned} \tag{9}$$

现在考虑任何 $x_0>0$，由方程(9)得

$$x_1-c=\frac{1}{2}(x_0-c)\left(1-\frac{c}{x_0}\right)>0$$

方程(9)也说明只要 $x_k>c$ 就有 $x_{k+1}>c$，而且

$$(x_{k+1}-c)<\frac{1}{2}(x_k-c) \tag{10}$$

不等式(10)蕴涵

$$\lim_{k\to\infty}|x_k-c|=0$$

或

$$\lim_{k\to\infty}x_k=c$$

于是得出结论：平衡状态 $x_e=c$ 是渐近稳定的. 我们把平衡状态 $x_e=-c$ 的研究留给读者.

定常线性系统

我们简略地考虑自由系统

$$\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k \qquad \mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0 \tag{11}$$

其解为

$$\mathbf{x}_k=\mathbf{\Phi}^k\mathbf{x}_0 \tag{12}$$

为了简单，设 $\mathbf{\Phi}$ 是简单结构的，以致 $\mathbf{\Phi}$ 相似于对角形矩阵，即

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{\Phi}\mathbf{T}=\mathrm{diag}[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n] \tag{13}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\mathbf{\Phi}$ 的特征值，$\mathbf{T}$ 是适当的矩阵．换言之，若作如在第六章所作的变量变换

$$\mathbf{x}_k=\mathbf{T}\mathbf{z}_k \tag{14}$$

于是方程(11)化为

$$\mathbf{z}_{k+1}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{\Phi}\mathbf{T}\mathbf{z}_k \tag{15}$$

方程(15)有解

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_k&=(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{\Phi}\mathbf{T})^k\mathbf{z}_0\\&=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{\Phi}^k\mathbf{T}\mathbf{z}_0\end{aligned} \tag{16}$$

显然方程(11)是稳定的，当且仅当方程(16)是稳定的．方程(16)的稳定性由考察(13)的 k 次幂，即

$$\mathrm{diag}[\lambda_1^k,\lambda_2^k,\cdots,\lambda_n^k] \tag{17}$$

而得到．于是运动 $z_i(k)$ 给出为

$$z_i(k)=\lambda_i^k z_i(0) \qquad i=1,2,\cdots,n$$

显然，当一切 $|\lambda_i|<1$，系统是渐近稳定的，此外若一个或多个 $|\lambda_i|=1$，系统是稳定的．另一方面，如果一个或多个 $|\lambda_i|>1$，系统是不稳定的．

如在第六章一样，我们可以利用约当型推广上述思想到任何定常线性系统．下列定理的证明留给读者[Kalman 和 Bertram，1960]．

定理 8.7-1 定常系统(11)是稳定的，如果转移矩阵 $\mathbf{\Phi}$ 的一

切特征值满足条件

$$|\lambda_i|<1 \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{18}$$

若对任何 i，$|\lambda_i|\neq 1$，则条件(18)是必要且充分的．（也可参看习题 8.28.）

下列定理提供了检验定常系统稳定性的一个更方便的方法．

定理 8.7-2 自由系统

$$\mathbf{x}_{k+1}=\Phi\mathbf{x}_k$$

的零态 $\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{0}$ 是全局稳定的，当且仅当 Φ^k 的每个元素当 $k\to\infty$ 时一致地趋于零．

定理 8.7-2 指出可以用转移矩阵连续自乘很多次来决定方程(11)的稳定性．由于矩阵乘法的简单性，这在数字计算机上是容易做到的．

这就结束了我们关于抽样数据系统的稳定性的简略讨论．读者应能够把第七章介绍的其它稳定性概念推广到抽样数据系统．事实上，能够把李雅普诺夫方法像用到连续系统那样应用到抽样数据系统．关于这个内容的进一步的基本论述参看裴特拉姆[1962]，更广泛的论述参看卡尔曼和裴特拉姆[1960]．

8.8. 结束语

这一章的内容说明了状态空间方法的多方面的适应性．例如，我们说明了对连续时间系统建立的许多理论和分析方法，只要稍加修改便可用到离散时间系统．事实上，读者按照所介绍的背景材料不难把状态空间方法推广和应用到各种抽样数据系统上去．在下章里按照需要将推广这一章所介绍的概念和思想．我们认为这一章是以后工作的基础，因此在本书的整个其余部分都应用这些材料．

参考资料

Bertram, J. E.: The Concept of State in the Analysis of Discrete-time Control Systems, *Proc. JACC*, June, 1962.

Hildebrand, F. B.: *Methods of Applied Mathematics*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1952.

Kalman, R. E., and J. E. Bertram: A Unified Approach to the Theory of Sampling Systems, *J. Franklin Inst.*, vol. 267, pp 405—436, 1959.

Kalman, R. E., and J. E. Bertram: Control System Analysis and Design via the Second Method of Liapunov: Discrete-time Systems, *J. Basic Eng.*, ser. D, vol. 82, pp. 394—400, 1960.

Ragazzini, J. R., and G. F. Franklin: *Sampled-data Control Systems*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1958.

Richardson, C. H.: *An Introduction to the Calculus of Finite Differences*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1954.

Tou, J. T.: *Digital and Sampled-data Control Systems*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1959.

Tou, J. T.: *Modern Control Theory*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1964.

Wylie, C. R., Jr.: *Advanced Engineering Mathematics*, 3d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.

习题

8.1. 设某人每月投资 10 元，月利率为0.5 %. 问 10 年末他有多少积累？

8.2. 求级数

$$\sum_{i=1}^{n} \sin i\theta$$

的和.

8.3. 求时间函数 $f(t)=t^2$ 的向前差分.

8.4. 时间函数 $f(t)$ 关于它的向前差分的时间导数是怎样的？利用此关系式导出 $f(t)=t^2$ 的导数。

8.5. 求系统

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u}$$

的控制分布矩阵，其中 $\mathbf{u}$ 为脉冲函数 $\mathbf{u}=\delta(t-t_c)$；对 $t_k\leqslant t_c<t$. 当 $\mathbf{B}=\mathbf{I}$ 时离散控制分布矩阵 $\mathbf{\Delta}$ 是什么？

8.6. 设 $\mathbf{J}_i$ 是某矩阵 $\mathbf{F}$ 的约当块. 试证

$$\mathbf{\Omega}(T)=\int_0^T e^{\mathbf{J}_i t}dt$$

是非奇的[参见例 5.6-1]。

8.7. 利用习题 8.6 的结果，试证

$$\mathbf{\theta}(T)=\int_0^T e^{\mathbf{F}t}dt$$

是非奇的.

8.8. 利用方程 (8.2-24)，求 10 的平方根. 对 x_0 首先用正数而后用负数开始迭代过程. 对 x_0 的两种选法，设计方案是否都合用？

8.9. 考察连续系统

$$\dot{x}=-\beta_1 x+u \qquad x(t_0)=x_0$$

其中 u 满足微分方程

$$\dot{u}=-\beta_2 u \qquad u(t_0)=u_0$$

假设输出 $y=x$ 是在随机时刻抽样的. 求估计 u_0 与 x_0 的表达式 [参看例 8.3-2].

8.10. 利用习题 8.9 的结果，由测量输出 $y(t_1)$ 与 $y(t_2)$ 导出估计 $x(t)$ 与 $u(t)$ 的表达式.

8.11. 考察差分方程

$$y_2+5y_1+y_0=0$$

按(8.4-6)定义状态变量并且写出状态方程.

8.12. 求习题 8.11 中系统的解[参看方程(8.5-4)]

8.13. 解差分方程组

$$r_{k+1}=3r_k+4S_k$$
$$S_{k+1}=r_k+3S_k$$

8.14. 设一个连续系统由方程

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

所描述．将此系统离散化并求转移矩阵．

8.15．设习题8.14的离散系统记作

$$\mathbf{x}_k=\boldsymbol{\Phi}(T)\mathbf{x}_{k-1}+\boldsymbol{\Delta}(T)u_{k-1}$$

其中 $\boldsymbol{\Delta}(T)=[1\quad 1]^T$．求此抽样数据系统的一般解[参看公式(8.5-9)]．

8.16．在习题8.15中设 $u_k=u$ 是个常数．求此抽样数据系统的封闭形式的解[参看方程(8.2-20)]．

8.17．若连续系统是

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ u_2\end{bmatrix}$$

求转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(T)$ 及离散时间控制分布矩阵 $\boldsymbol{\Delta}(T)$．

8.18．习题8.17中的系统有平衡状态吗？

8.19．对例8.2-2中的系统求平衡状态．

8.20．在例8.2-2中设 $t_{k+1}-t_k=T$，又设 $u(t_k)=c[f(x^d)-x(t_k)]$，其中 x^d 是某个所期望的状态．系统方程成为

$$x_{k+1}=[e^{-T}-c(1-e^{-T})]x_k+c(1-e^{-T})f(x^d)$$

求此方程的平衡解．若平衡状态 $x_e=x^d$，求 $f(x^d)$．

8.21．在习题8.20中令 $f(x^d)=\frac{1+c}{c}x^d$．问对于 c 的什么值系统是稳定的？

8.22．设想差分信号 $x^d-x(t_k)$ 是可积的且所得的信号用来控制例8.2-2中的系统．换言之，控制是

$$u(t_k)=z(t_k)+c[x^d-x(t_k)]$$

其中

$$(E-1)z(t_k)=c[x^d-x(t_k)]$$

设 $t_{k+1}-t_k=T$，试导出增广系统．

8.23．求习题8.22中所描述系统的平衡状态．平衡状态依赖于增益 c 吗？对于稳定性，c 有什么限制吗？

8.24．例8.2-1中系统在定义8.7-1的意义中是稳定的吗？为要系统是稳定的 r 必须是什么？

8.25．求差分方程

$$x_n+(k-1)x_{n-1}=c$$

的解，其中 c 是某个常数．(为要求特解，假设 x_n 是常数并且像解连续微分方程一样来进行．)对于 k 的什么值系统是稳定的？

8.26. 考察由

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

所描述的系统．利用定义 8.7-1 的基本概念确定此系统的稳定性．利用定理 8.7-1 确定它的稳定性．

8.27. 证明定理8.7-1

8.28. 试证定理 8.7-1 相等于结果：z 变换的极点 z_i 必定位于复 z 平面以原点为中心的单位圆内[Ragazzini 和 Franklin, 1958]．[提示：展开(8.6-8)式成部分分式并利用例 8.6-1 的结果变换到时域中去．]

8.29. 连续定常系统 $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}$ 的特征值与抽样数据系统 $\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{\Phi}(T)\mathbf{x}_k$ 的特征值的关系怎样？如果连续系统是稳定的，问抽样数据系统是稳定的吗？

8.30. 求例 5.6-3 中的转移矩阵的特征值．关于稳定性你如何区分此系统？

8.31. 以对方程(8.5-1)取 z 变换来建立公式(8.6-19)．[提示：利用公式(8.6-11)．]

第九章　可控制性与可观测性

9.1. 引言

在控制系统的研究中，我们不言而喻地已假定迫使系统按照某种预定的计划工作是可能的。换言之，在一般情况作了隐含的假定：在有限时间间隔内用某个控制操作把系统的状态从任一初态转换到任何所期望的状态是可能的。一般说来，这个假设并不正确，但是如果它正确的话，我们就说系统是完全可控制的。本章的目的是建立可控制性的概念和论断。与可控制性"对偶"的是可观测性：如果在有限时间间隔内由观测一个系统的输出就能决定该系统的任何初态，此系统就是完全可观测的。我们将要确定可观测性与可控制性之间的对偶关系并研究这些论断。

在 §9.2 要引入可控制性的概念，且试图对抽样数据系统设计一个最优控制器。我们将要发现，如果某些条件满足的话，亦即如果系统是完全可控制的话，以最小个数的控制信号（振动终止系统）转换任何初态到原点是可能的。我们在二维状态空间说明可控制性的概念以建立直观的几何概念。

在 §9.3 把可控制性与可观测性在抽样数据系统上作了推广。在这一节里不去细谈这些定理，因为当用到时，§9.4的定理常常更易于使用。在 §9.4 利用吉柏特的工作［1963］对于定常线性微分方程引入这些概念。我们给出吉柏特的定义和他的一些定理及其证明。我们也给出由卡尔曼[1960]等人建立的由标准方程确定可控制性和可观测性的一般准则，并且提出和说明一些一般的定理，这些定理的证明在 §9.5 中给出。这里也给出可应用于时变线性

系统的一些定义和定理. 我们也介绍了定常系统引入抽样后的可控制性与可观测性的卡尔曼-裴特拉姆[1958]准则.

在最后一节简略地考察了识别问题. 我们提出由观测脉冲响应矩阵确定系统动态方程的实现问题. 给出关于这个问题的一个定理，此定理提供了综合问题的一个解法.

这一章的一般处理法，如前面的引言所指出的，是由特殊到一般. 首先由简单的控制问题导出可控制性的基本概念. 然后，把离散时间问题推广，进而讨论具有相异特征根的定常系统. 接着考察时变系统并且介绍状态空间的标准分解法.

9.2. 一个控制问题

在这一节里我们要引入可控制性概念，为此用了处理控制问题的间接方法，在那里为了达到满意的答案，某些假设是需要的. 这个方法不仅可以用来导出可控制性概念且给它以物理意义，而且也用了前几章研究过的技巧. 现在我们还不涉及可控制性的正式定义. 主要是想建立导出可控制性概念的一些物理的和直观的理由，以及一般地说明在状态空间可控制性的几何意义.

图 9.2-1 说明了所考察的控制系统. 问题是找出控制变量

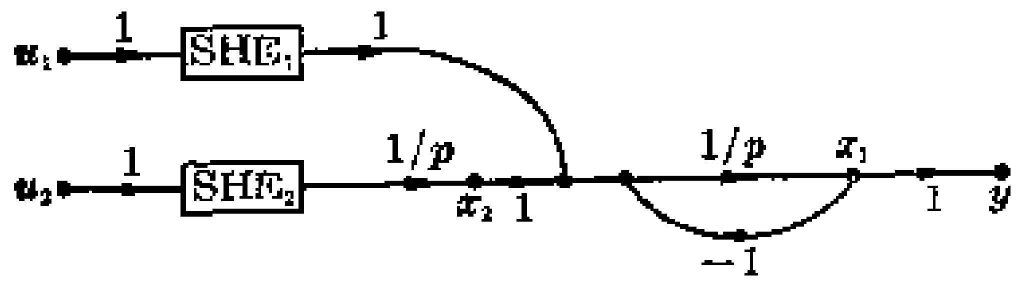


图 9.2-1　二维状态空间的控制问题(SHE 表示样本保持元件)

$u_1(t_k)$与$u_2(t_k)(k=0,1,2,\cdots)$的一个序列，它们将使系统以抽样时间的最少次数从任一初态 $\mathbf{x}(0)$转换到平衡状态[Kalman 和 Bertram, 1958]. 如图所示，控制变量是分段常数，因为我们假定控制信号来自数字计算机. 因而为了转换离散信号(即数)到连续

信号，样本保持元件是必需的.

首先假定 $u_1\equiv 0$ 且抽样区间 T 是常数，由图得出状态方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ u_2\end{bmatrix} \tag{1}$$

运动 $\mathbf{x}$ 由下式给出

$$\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{\Phi}(T)\mathbf{x}(k)+\mathbf{\Delta}(T)\mathbf{u}(k) \tag{2}$$

其中

$$\mathbf{\Phi}(T)=\begin{bmatrix}e^{-T} & 1-e^{-T}\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\mathbf{\Delta}(T)=\begin{bmatrix}1-e^{-T} & T-1+e^{-T}\\ 0 & T\end{bmatrix} \tag{4}$$

且 $T=t_{k+1}-t_k$, $k=0,1,2,\cdots$. 由于暂时假定 $u_1\equiv 0$，只需考虑 $\mathbf{\Delta}$ 的第二列，且记为 $\mathbf{\Delta}_2(T)=\mathbf{\Delta}_2$.

现在考察求控制序列 $u_2(0), u_2(1),\cdots$的问题，它将转换任意初态 $\mathbf{x}(0)$为原点，即 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$. 首先考察一切初态的子空间 X_1,这些初态只用一个控制如 $u_2(0)$就能转换到原点. 设 $\mathbf{x}'(0)$是 X_1 中的一个矢量，则由(2)式

$$\mathbf{x}(1)=\mathbf{0}=\mathbf{\Phi}(T)\mathbf{x}'(0)+\mathbf{\Delta}_2(T)u_2(0) \tag{5}$$

解出 $\mathbf{x}'(0)$得

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(0)&=-\mathbf{\Phi}(-T)\mathbf{\Delta}_2(T)u_2(0)\\ &=-\mathbf{\Phi}^{-1}(T)\mathbf{\Delta}_2(T)u_2(0)\end{aligned} \tag{6}$$

设

$$\mathbf{h}_1=\mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{\Delta}_2=\begin{bmatrix}T+1-e^{T}\\ T\end{bmatrix} \tag{7}$$

于是矢量 $\mathbf{h}_1$ 生成一维子空间 X_1，且在此子空间内任何初态 $\mathbf{x}'(0)$ 使用一个控制信号可以转换到原点.

为了用图形说明上述概念，令 $\mathbf{e}_1=[1\quad 0]^T$及 $\mathbf{e}_2=[0\quad 1]^T$为

二维状态空间X的基矢量. 于是X中任何状态 $\mathbf{x}$ 可写为

$$\mathbf{x}(k)=x_1(k)\mathbf{e}_1+x_2(k)\mathbf{e}_2 \tag{8}$$

如图 9.2-2 所示. 图中也指出一维空间 X_1. 在 X_1 中任何矢量 $\mathbf{x}$ 都可表达为

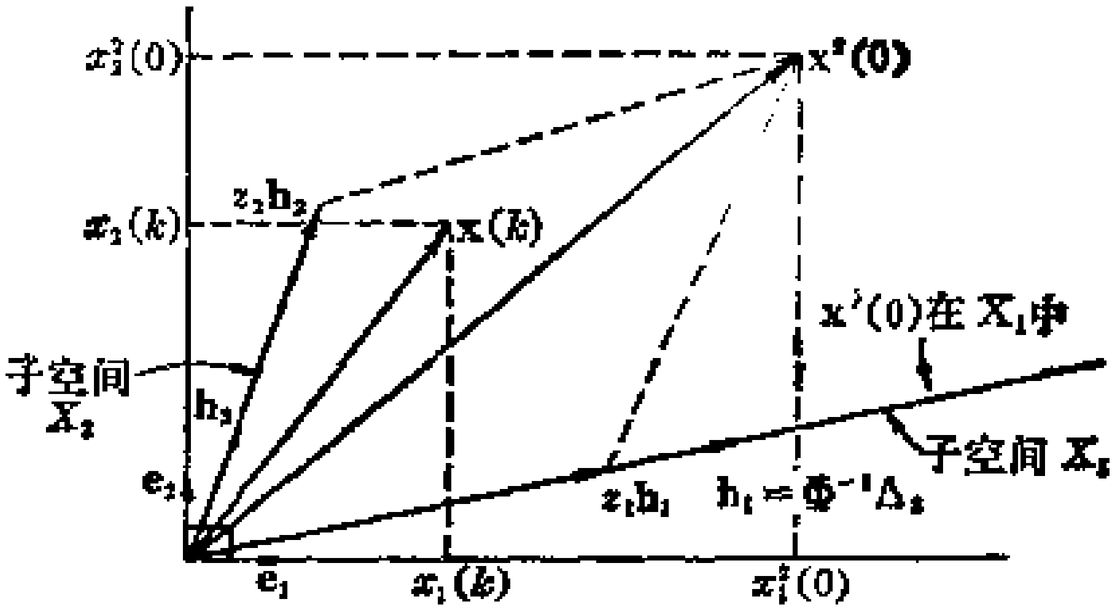


图 9.2-2　二维状态空间X及一维子空间 X_1 和 X_2

$$\mathbf{x}=z_1\mathbf{h}_1 \tag{9}$$

这里 z_1 是某个实常数.

我们接着考察可用两个控制转换为原点的一切初态. 设 $\mathbf{x}^2(0)$是这样的一个状态. 显然, 如果用一个控制能把 $\mathbf{x}^2(0)$转换到子空间 X_1, 则只需要另一个控制步骤就能转换此系统状态为原点. 设 $u_2(0)$把 $\mathbf{x}^2(0)$转换到 X_1, 即

$$\Phi\mathbf{x}^2(0)+\Delta_2u_2(0)=\mathbf{x}(1)=z_1(1)\mathbf{h}_1 \tag{10}$$

解出 $\mathbf{x}^2(0)$, 有

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^2(0)&=\Phi^{-1}[z_1\mathbf{h}_1-\Delta_2u_2(0)]\\&=z_1\Phi^{-1}\mathbf{h}_1-\Phi^{-1}\Delta_2u_2(0)\\&=z_1\mathbf{h}_2-\mathbf{h}_1u_2(0)\end{aligned} \tag{11}$$

其中

$$\mathbf{h}_2=\Phi^{-2}\Delta_2=\Phi^{-1}\mathbf{h}_1=\begin{bmatrix}T+e^{T}-e^{2T}\\T\end{bmatrix} \tag{12}$$

由(11)，每个 $\mathbf{x}^2(0)$ 都可写成一般形式

$$\mathbf{x}^2(0)=z_1(0)\mathbf{h}_1+z_2(0)\mathbf{h}_2 \tag{13}$$

图 9.2-2 表出在基组 $\mathbf{h}_1$，$\mathbf{h}_2$ 中的分量 $z_1(0)$ 和 $z_2(0)$. $\mathbf{h}_1$ 与 $\mathbf{h}_2$ 是基组这一事实尚待证明. 的确，如果这两个矢量不是线性独立的(因而不能构成矢量空间的基组)，则存在在任意次数控制步骤下不能转换为原点的初态. 在以后将作详细说明. 然而我们已经发现导致作出可控制性定义的问题. 作为以后讨论的基础，现在给出一个粗率的定义. 我们说一个系统是完全可控制的，如果用一个适当的控制函数，有限多次可把每个初态转换到原点. 一般说来，当称系统是可控制时，省略了"完全"一词；亦即当我们说系统是可控制的，它的意思就是每一个初态是可控制的. 如果有某些而非全部初态是可控制的，就不能说这个系统是可控制的.

现在证明矢量 h_1, h_2 是线性独立的. 这是很容易的，因为行列式

$$|\mathbf{h}_1 \quad \mathbf{h}_2|=\begin{vmatrix} T+1-e^T & T-e^{2T}+e^T \\ T & T \end{vmatrix}=T(1-2e^T+e^{2T})$$

当 $T\neq 0$ 时不为零. 所以二矢量 $\mathbf{h}_1$ 与 $\mathbf{h}_2$ 构成二维状态空间 X 的基底. 于是在 X 中任何状态可写为

$$\mathbf{x}(k)=z_1(k)\mathbf{h}_1+z_2(k)\mathbf{h}_2 \tag{14}$$

现设 $\mathbf{x}(0)$ 是表示如 (14) 式的 X 中的任何初态. 选择第一控制 $u_2(0)$ 使得 $\mathbf{x}(1)$ 在 X_1 中. 即

$$\mathbf{x}(1)=\mathbf{\Phi}\mathbf{x}(0)+\mathbf{\Delta}_2 u_2(0)=z_1(h)\mathbf{h}_1 \tag{15}$$

把(14)代入，有

$$\mathbf{x}(1)=\mathbf{\Phi}[z_1(0)\mathbf{h}_1+z_2(0)\mathbf{h}_2]+\mathbf{\Delta}_2 u_2(0)$$

整理后得

$$\mathbf{x}(1)=z_2(0)\mathbf{h}_1+[z_1(0)+u_2(0)]\mathbf{\Delta}_2$$

当

$$u_2(0)=-z_1(0) \tag{16}$$

时，状态 $\mathbf{x}(1)$ 必在 X_1 中．这时

$$\mathbf{x}(1)=z_2(0)\mathbf{h}_1=z_1(1)\mathbf{h}_1$$

现在如果 $\mathbf{x}(1)$ 可用一个控制步骤转换到原点，于是

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(2)=\mathbf{0}&=\Phi\mathbf{x}(1)+\boldsymbol{\Delta}_2u_2(1)\\&=\Phi z_1(1)\mathbf{h}_1+\boldsymbol{\Delta}_2u_2(1)\\&=[z_1(1)+u_2(1)]\boldsymbol{\Delta}_2\end{aligned}$$

所以

$$u_2(1)=-z_1(1) \tag{17}$$

(16)与(17)就是所期望的控制函数，为了得到这些函数的显式，应用(8)及(14)，即

$$\mathbf{x}(k)=z_1(k)\mathbf{h}_1+z_2(k)\mathbf{h}_2 \tag{18}$$

$$\mathbf{x}(k)=x_1(k)\mathbf{e}_1+x_2(k)\mathbf{e}_2 \tag{19}$$

我们希望解出 $z_1(k)$．这里只涉及到基底的改变，例如，有

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_1&=p_{11}\mathbf{e}_1+p_{21}\mathbf{e}_2\\\mathbf{h}_2&=p_{12}\mathbf{e}_1+p_{22}\mathbf{e}_2\end{aligned} \tag{20}$$

因此坐标矢量由下式连结：

$$\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_{11}&p_{12}\\p_{21}&p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1(k)\\z_2(k)\end{bmatrix} \tag{21}$$

$\mathbf{P}$ 中元素 p_{ij} 只是在基 $\mathbf{e}$ 中 $\mathbf{h}_1,\mathbf{h}_2$ 的坐标。于是利用(7)及(12)有

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_1&=(T+1-e^T)\mathbf{e}_1+T\mathbf{e}_2\\\mathbf{h}_2&=(T-e^{2T}+e^T)\mathbf{e}_1+T\mathbf{e}_2\end{aligned} \tag{22}$$

如在开始时所说明的，问题是要找出控制变量序列 $u_2(0)$ 及 $u_2(1)$，它们已被求得为

$$u_2(0)=-z_1(0)$$
$$u_2(1)=-z_1(1)$$

所以我们继续由方程(21)求解 $z_1(0)$ 及 $z_1(1)$．$\mathbf{P}$ 的逆是

$$\mathbf{P}^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{P}|}\begin{bmatrix} T & -(T+e^{T}-e^{2T}) \\ -T & T+1-e^{T} \end{bmatrix} \tag{23}$$

于是控制变量是

$$-u_2(k)=z_1(k)=\frac{1}{|\mathbf{P}|}[Tx_1(k)-(T+e^{T}-e^{2T})x_2(k)] \tag{24}$$

此闭环控制系统如图 9.2-3 所示. 此环路是通过数字计算机而封闭的, 其中矩阵 $\mathbf{P}$ 是与其它需要的数值计算一道来反转的.

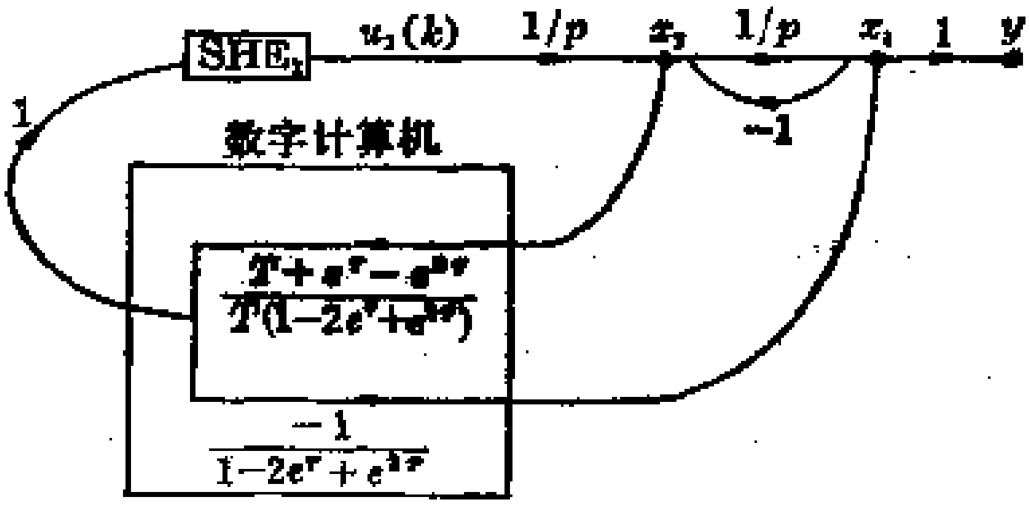


图 9.2-3 连续系统的数字计算机控制

图 9.2-4 给出在状态空间中由于应用控制 $u_2(0)$ [见(16)式]引起运动的图解. 状态 $\mathbf{x}(0)$ 转换到在一维子空间 X_1 内的状态 $\mathbf{x}(1)$. 这个运动是用控制 $u_2(0)=-z_1(0)$ 作出的. 然后再用控制 $u_2(1)=-z_1(1)$ 把状态 $\mathbf{x}(1)$ 转换到原点. 为了有助于这个问题的推广, 可总结此运动如下: 在基底 $\mathbf{h}$ 中, $\mathbf{x}(0)$ 是 $\mathbf{h}_1$ 与 $\mathbf{h}_2$ 的线性组合; 作控制[即 $u_2(0)$]后, 状态 $\mathbf{x}(1)$ 只是 $\mathbf{h}_1$ 的线性组合. 这就是

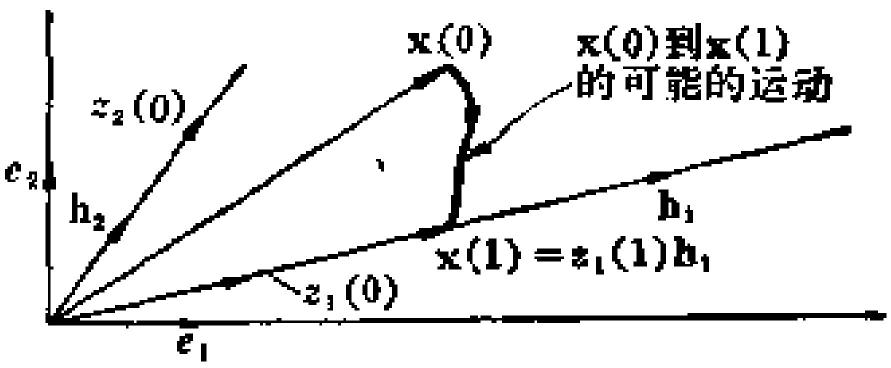


图 9.2-4 在状态空间中 $x(0)$ 到 $x(1)$ 作为应用控制 $u_2(0)$ [(9.2-16)式]的结果的运动的图解

说，运动是这样的，每使用一次有效的控制，状态所属的空间的维数就少一。

今设想根据(16)与(17)把此问题推广。对于 n 维系统，一般的控制函数是

$$u_n(k)=-z_1(k) \tag{25}$$

其中 $\mathbf{u}$ 是特殊的控制矢量 $\mathbf{u}=[0\ \ 0\ \cdots\ u_n]^T$。于是(14)式推广为

$$\mathbf{x}(k)=\sum_{i=1}^{n} z_i(k)\mathbf{h}_i \tag{26}$$

其中

$$\mathbf{h}_i=\mathbf{\Phi}^{-i}\mathbf{\Delta}_n \tag{27}$$

矢量 $\mathbf{\Delta}_n$ 是 $n\times n$ 分布矩阵的第 n 列矢量. 我们断言，如果控制函数列 $u_n(k)$ $(k=0, 1, 2, \cdots n)$ 施加于系统，每用一次 $u_n(k)$，则 $\mathbf{x}(k)$ 所属的空间的维数就逐次地减少一次，证明留给读者。当然，假定系统是可控制的，因而矢量 $\mathbf{h}_1$，$\mathbf{h}_2$，$\cdots$，$\mathbf{h}_n$ 是线性独立的 [Kalman 和 Bertram, 1958].

与上述可控制系统相反的是不可控制的系统，我们考察同样的系统(图 9.2-1)但取 $u_1\neq 0$, $u_2=0$. 现在要问用控制函数列 $u_1(k)$ $(k=0, 1, 2, \cdots, n)$ 转换任何初态为原点是否可能。对图 9.2-1粗略地观察就能得出这是不可能的结论，因为 u_1 不影响状态 x_2. 我们研究此分析的论断.

仍从如以上的问题开始研究，得出与(5)相似的式子。再设 $\mathbf{x}'(0)$ 是能用一个控制转换为原点的状态，于是

$$\mathbf{x}(1)=\mathbf{0}=\mathbf{\Phi}(T)\mathbf{x}'(0)+\mathbf{\Delta}_1(T)u_1(0)$$

其中 $\mathbf{\Delta}_1(T)$ 是 $\mathbf{\Delta}$ 的第一列矢量。解出 $\mathbf{x}'(0)$，得

$$\mathbf{x}'(0)=-\mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{\Delta}_1u_1(0)=-\mathbf{h}_1u_1(0) \tag{28}$$

如上一样继续作下去，得到与(11)相似的式子，即

$$\mathbf{x}^2(0)=z_1\mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{h}_1-\mathbf{h}_1u_1(0)$$

但是这时我们发现 $\Phi^{-1}\mathbf{h}_1=\mathbf{h}_2$ 与 $\mathbf{h}_1$ 是线性相关的. 事实上，有

$$|\mathbf{h}_1 \quad \mathbf{h}_2|=\begin{vmatrix} e^T-1 & e^{2T}-e^T \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0 \tag{29}$$

注意到(29)中行列式是由(21)式所定义的矩阵 $\mathbf{P}$ 的坐标变换行列式. 因此，在这种情况下，不能如(23)式那样用矩阵求逆解出控制变量. 这样的系统称为不可控制的，因为矢量 $\mathbf{h}_1$ 及 $\mathbf{h}_2$ 不能生成整个状态空间 X. 如果 $u_1(k)$ 是仅有的一个控制变量，它不可能在有限时间内(也即一个有限控制列)转换每一个初态为原点. 如果初态发生在由 $\mathbf{h}_1$ 生成的空间，则一个控制就足够了，这时就可称它是可控制的状态.

在图 9.2-5 中描述了一个状态 $\mathbf{x}(0)$ 分解为投影到 $\mathbf{h}_1$ 上的分

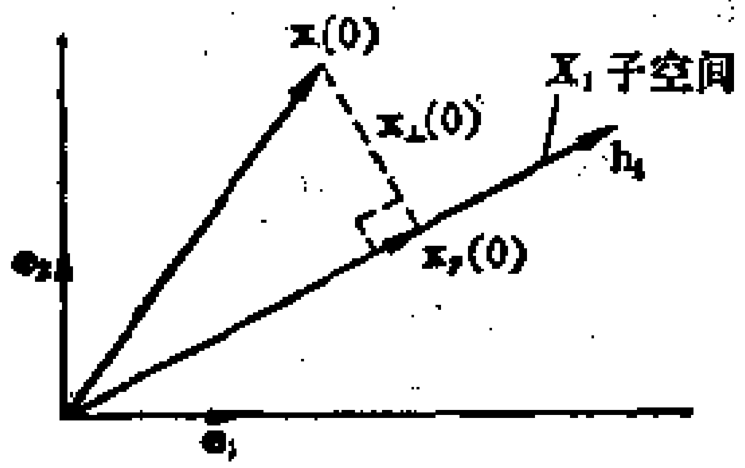


图 9.2-5 初态 $\mathbf{x}(0)$ 分解为正投影分量 $\mathbf{x}_p(0)$ 与垂直分量 $\mathbf{x}_\perp(0)$

量 $\mathbf{x}_p(0)$ 及垂直于 $\mathbf{h}_1$ 的分量 $\mathbf{x}_\perp(0)$. 直观地看来分量 $\mathbf{x}_p(0)$ 可转换到原点，因为它是在由 $\mathbf{h}_1$ 生成的空间上. 另一方面，我们不能只用控制序列 $u_1(0), u_1(1), \cdots$ 变换分量 $\mathbf{x}_\perp(0)$ 到子空间 X_1. 在这种情况，我们说系统是不可控制的，因为状态只有一部分而不是全部都是可控制的. 这些结果将在以后推广. 在这里我们主要说明的是可控制性的几何方面，因为在维数上容易理解. 我们用下面控制系统问题说明上述思想.

例 9.2-1 考察图 9.2-6 所示的控制系统，它相似于§6.9所述继电器控制问题. 设 $x_1=y, x_2=\dot{y}$; 则有

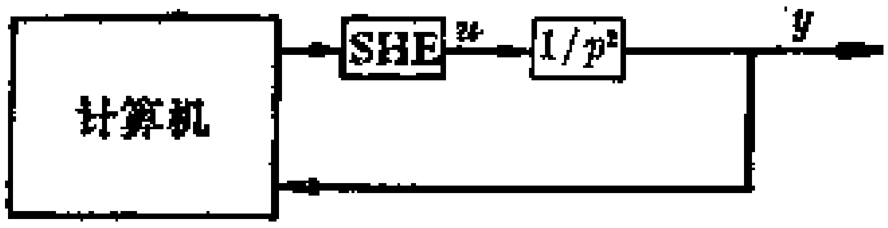


图 9.2-6　例 9.2-1 的控制系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ u\end{bmatrix}$$

$$y=[1\quad 0]\mathbf{x}$$

此问题是求控制序列，它正好在两个抽样周期内转换任何初态 $\mathbf{x}(0)$ 为原点。设 T 是抽样周期，这时

$$\Phi=\begin{bmatrix}1 & T\\ 0 & 1\end{bmatrix}\qquad \mathbf{\Delta}_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}T^2\\ T\end{bmatrix}$$

求出

$$\mathbf{h}_1=\Phi^{-1}\mathbf{\Delta}_2=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}T^2\\ T\end{bmatrix}\qquad \mathbf{h}_2=\Phi^{-1}\mathbf{h}_1=\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}T^2\\ T\end{bmatrix}$$

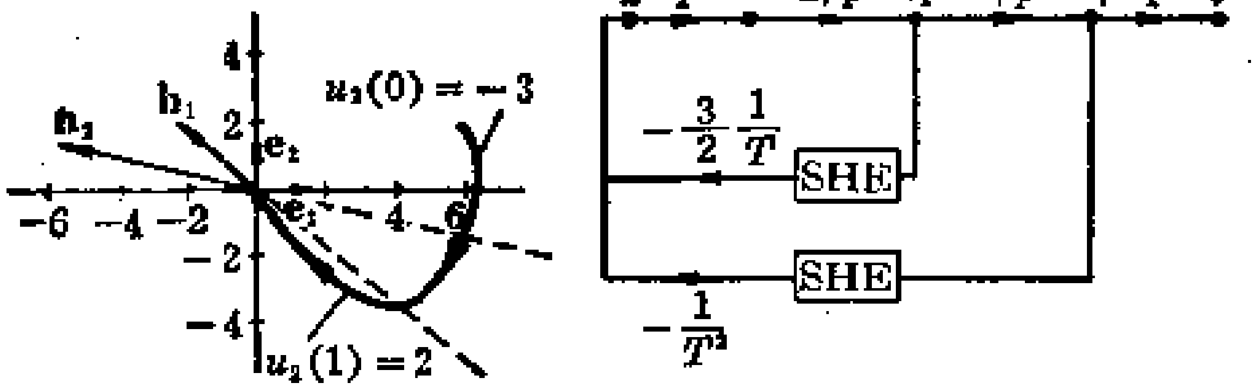
用 $x_1(k)$ 及 $x_2(k)$ 表示 $z_1(k)$ 及 $z_2(k)$，有

$$\begin{bmatrix}z_1(k)\\ z_2(k)\end{bmatrix}=[\mathbf{h}_1\quad \mathbf{h}_2]^{-1}\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{T^2} & \frac{3}{2}\ \frac{1}{T}\\ -\frac{1}{T^2} & -\frac{1}{2T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\end{bmatrix}$$

最后，由(16)及(17)求得

$$u_2(0)=-z_1(0)=-\frac{1}{T^2}x_1(0)-\frac{3}{2}\ \frac{1}{T}x_2(0)$$

$$u_2(1)=-z_1(1)=-\frac{1}{T^2}x_1(1)-\frac{3}{2}\ \frac{1}{T}x_2(1)$$



(a)　　(b)

图 9.2-7　例 9.2-1 的系统在相平面上的运动及流图

设 $T=2$ 及 $\mathbf{x}(0)=6\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2$，则 $u_2(0)=-3$。求出 $\mathbf{x}(1)=4\mathbf{e}_1-4\mathbf{e}_2$. 对第二控制求得 $u_2(1)=2$. 最后看出 $\mathbf{x}(2)=\mathbf{0}$, 正如先所预料的. 这些结果与系统的流图用图 9.2-7 说明。

9.3. 抽样数据系统

由 §9.2 控制问题的启发，现在着手对定常离散时间系统推广可控制性的概念. 如前所述，我们的途径是介绍前二节的简单概念及数学，并且推广后者. 因此在这一节中由考察定常微分系统

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u} \tag{1a}$$

$$\mathbf{y}=\mathbf{C}\mathbf{x} \tag{1b}$$

开始. 控制矢量假定在一固定时间区间 T 内是分段常数，因此有离散时间系统

$$\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{\Phi}(T)\mathbf{x}_k+\mathbf{\Delta}(T)\mathbf{u}_k \tag{2a}$$

$$\mathbf{y}_k=\mathbf{C}\mathbf{x}_k \tag{2b}$$

其中 $\mathbf{x}=n$ 维状态矢量

$\mathbf{y}=m$ 维输出矢量

$\mathbf{u}=p$ 维控制矢量

转移矩阵与分布矩阵分别由

$$\mathbf{\Phi}(T)=e^{AT} \tag{3}$$

$$\mathbf{\Delta}(T)=\left(\int_0^T e^{As}ds\right)\mathbf{B} \tag{4}$$

给出. 我们看到 $\mathbf{\Phi}(T)$ 对一切 T 是非奇的，且

$$\mathbf{\Phi}(-iT)=\mathbf{\Phi}^{-i}(T) \tag{5}$$

通常省略时间变元 T 并简单地写为 $\mathbf{\Phi}$ 及 $\mathbf{\Delta}$.

在把 §9.2 的概念正式化之前，先说明控制矩阵 $\mathbf{B}$ 及 $\mathbf{\Delta}$ 的物理意义. 这些矩阵详细说明系统关于输入是如何受约束的. 例如

$\mathbf{B}$ 中元素 b_{ij} 是由第 j 个控制变量 u_j 到第 i 个状态变量 x_i 的"增益". 对于 $\mathbf{A}$ 的元素也是一样的. 如果每一个状态变量可直接由输入得到,此系统称为对输入不受约束的. 输出矩阵 $\mathbf{C}$ 也详细说明系统对输出是如何受约束的. 如果所有状态变量都能直接测量,此系统称为对输出不受约束的. 图 9.3-1 表示一个系统有两个输入及一个输出. 此系统是受输入与输出二者约束的.

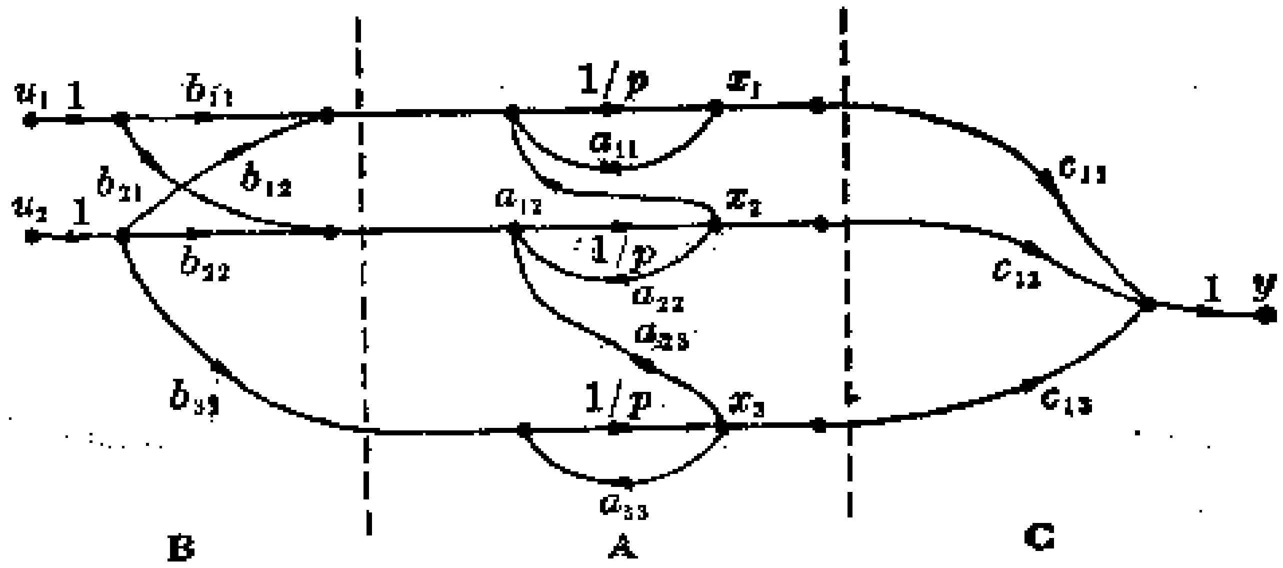


图 9.3-1　标准系统方程的图解

可控制性

现在着手将 § 9.2 的结果形式化. 推导可以类似于那一节里控制问题的讨论,先从考察有单个控制变量 u_1 的系统开始. 这个方法也将简化数学的技术性细节. 只要稍加修改就可推广到多输入系统.

按照单输入离散时间系统,给出下列正式定义:

定义 9.3-1　初态 $\mathbf{x}(0)$ 称为可控制的,如果存在一个有限控制序列 $u_1(k)$, $k=0, 1, 2, \cdots, q$, 使得 $\mathbf{x}(nT; \mathbf{x}(0), u_1(k))=\mathbf{0}$. 数 q 可能依赖于 $\mathbf{x}(0)$. 若每个初态都是可控制的,称此系统为完全可控制的.

不大正式地说,此定义意味着一个完全可控制系统的每一个初态在有限长时间内可以转换为任何所期望的状态(在上面定义中是原点). 由此定义显然没有约束(例如大小或能量)强加于控

制信号. 事实上,此定义不涉及任何的物理根据,例如不精确的系统模型,系统中的噪声,或其它的限制, 这些在物理上不可能使这样的控制序列实现机械化.

下面给出离散时间系统(2)的可控制性定理, 其中 $\mathbf{u}_k=u_1(k)$ 且 $\mathbf{\Delta}=\mathbf{\Delta}_1$ 是一个列矢量. 为了详细说明,我们考虑 n 维实状态空间 X, 因此 $\mathbf{\Phi}$ 是实元素的 $n\times n$ 矩阵, $\mathbf{\Delta}_1$ 是实元素的 $n\times 1$ 矢量. 于是有下列定理[Kalman, 1961].

定理 9.3-1 单输入离散时间系统(2)是完全可控制的,当且仅当 n 个矢量 $\mathbf{\Delta}_1, \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{\Delta}_1, \cdots, \mathbf{\Phi}^{-n+1}\mathbf{\Delta}_1$ 是线性独立的.

为了证明此定理,考察系统

$$\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k+\mathbf{\Delta}_1 u_k$$

这里为了方便写 $u_1(k)=u_k$. 迭代 $q-1$ 次,有

$$\mathbf{x}_{k+q}=\mathbf{\Phi}^q\left[\mathbf{x}_k+\sum_{i=1}^{q}\mathbf{\Phi}^{-i}\mathbf{\Delta}_1 u_{k+i-1}\right] \tag{6}$$

由方程(6)可以得出正好 q 步能转换到原点的一切初态 $\mathbf{x}_k^0$ 的集合 $S(q)$. 这些初态 $\mathbf{x}_k^0$ 由

$$\mathbf{x}_k^0=\sum_{i=1}^{q}\alpha_i\mathbf{\Phi}^{-i}\mathbf{\Delta}_1=\sum_{i=1}^{q}\alpha_i\mathbf{g}_i \tag{7}$$

给出,其中

$$\mathbf{g}_i=\mathbf{\Phi}^{-i}\mathbf{\Delta}_1 \qquad i=1,2,\cdots,q \tag{8}$$

这就是说,把形如(7)式给出的任何矢量,即在集合 $S(q)$ 中的任何矢量代入方程(6)中,得到

$$\mathbf{x}_{k+q}=\mathbf{\Phi}^q\sum_{i=1}^{q}\mathbf{\Phi}^{-i}\mathbf{\Delta}_1(\alpha_i+u_{k+i-1}) \tag{9}$$

由此当 $u_{k+i-1}=-\alpha_i$ 时有 $\mathbf{x}_{k+q}=\mathbf{0}$

先证明充分性. 如果矢量 $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \cdots, \mathbf{g}_n$ 是线性独立的,则它们

是状态空间X的基矢量．于是X中每个矢量可以用$q=n$步转换到原点，故此系统是完全可控制的．为了证明必要性，可用归谬法，假设系统是完全可控制的，但n个矢量$\mathbf{g}_1$，$\mathbf{g}_2$，…，$\mathbf{g}_n$中只有r个是线性独立的．容易说明若n个矢量中r个是线性独立的，它们是起始的r个，即$\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2,\cdots,\mathbf{g}_r$是线性独立的．因此可以转换到原点的一切状态的集合是$S(r)$．于是集合$S(r)$是一切可控制状态的集合，维数是$r<n$．由于此集合$S(r)$不象完全可控制所要求的那样是整个空间X，于是得到一个矛盾．

要注意的是在定理9.3-1中矢量的集合不是(8)式给出的同样的集合．然而定理9.3-1中每一个矢量给出为$\Phi\mathbf{g}_i$，$i=1,2,\cdots,q$，且Φ是非奇的．因此若集合$\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2,\cdots,\mathbf{g}_n$是线性独立的，则集合$\Phi\mathbf{g}_1,\Phi\mathbf{g}_2,\cdots,\Phi\mathbf{g}_n$也是线性独立的．后一个矢量的集合就是定理中给出的集合，因为它是较易处理的．

例9.3-1 考察图9.3-2中流图所描述的系统．由图看出，如果输入施加于点3，系统是完全可控制的．至少，控制施加于这个点将影响一切状态变量．如果输入施加在点1或2，系统不是完全可控制的．由319页给出的非正式定义对在点1与2施加输入，系统是不可控制的．由图看出控制施加于点1将不影响状态变量x_2及x_3．同样，控制施加于点2将不影响x_3．

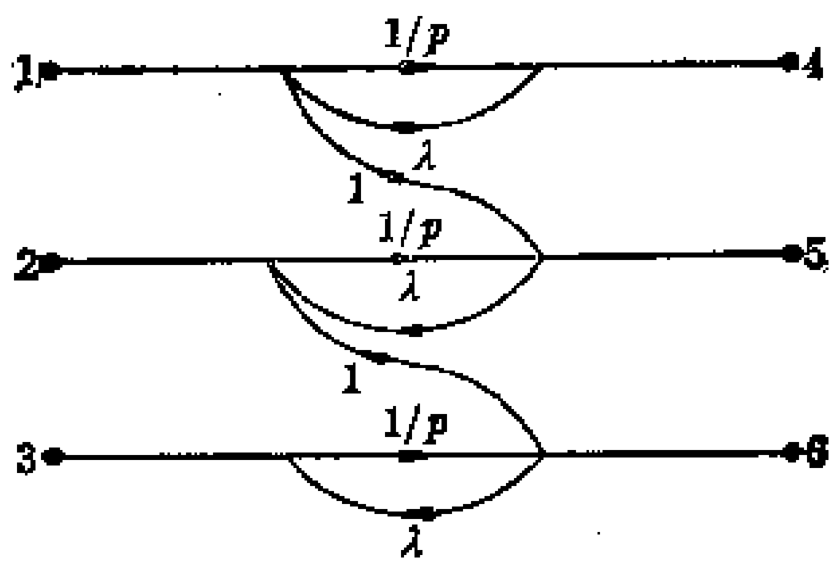


图9.3-2 例9.3-1的系统

我们验证定理9.3-1．微分转移矩阵是

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix} \tag{10}$$

又转移矩阵是

$$\Phi(T)=e^{\lambda T}\begin{bmatrix}1 & T & \frac{T^2}{2}\\ 0 & 1 & T\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{11}$$

$\Phi(T)$的积分为

$$\begin{bmatrix}\frac{e^{\lambda T}-1}{\lambda} & \frac{\lambda Te^{\lambda T}-e^{\lambda T}+1}{\lambda^2} & \frac{T^2e^{\lambda T}}{2\lambda}-\frac{\lambda Te^{\lambda T}-e^{\lambda T}+1}{\lambda^3}\\ 0 & \frac{e^{\lambda T}-1}{\lambda} & \frac{\lambda Te^{\lambda T}-e^{\lambda T}+1}{\lambda^2}\\ 0 & 0 & \frac{e^{\lambda T}-1}{\lambda}\end{bmatrix} \tag{12}$$

利用(5)，有

$$\Phi^{-i}=\Phi(-iT)=e^{-i\lambda T}\begin{bmatrix}1 & -iT & \frac{(iT)^2}{2}\\ 0 & 1 & -iT\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{13}$$

现设控制只施加于点1．换言之，取矩阵 $\mathbf{B}=[1 \quad 0 \quad 0]^T$．于是分布矩阵是(12)的第一列．对于三个矢量 $\mathbf{\Delta}_1, \Phi^{-1}\mathbf{\Delta}_1, \Phi^{-2}\mathbf{\Delta}_1$，有

$$\Phi^{-i}\mathbf{\Delta}_1=\begin{bmatrix}\frac{e^{-\lambda iT}(e^{\lambda T}-1)}{\lambda}\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \qquad i=0,1,2 \tag{14}$$

显然，这些矢量中只有一个是线性独立的．这就证实了我们的观察：控制施加于点1只可影响状态变量 x_1．于是在(14)中的矢量的集合生成一个一维空间，在这个空间内任何矢量都可转换到原点．这就是说，任何初始条件 $x_1(0)$都能转换到原点，而其它非零的初始条件像 $x_2(0)$及 $x_3(0)$是不能转换到原点的．

继续讨论此例，设想我们把控制施加于点2，则有 $\mathbf{B}=[0 \quad 1 \quad 0]^T$及分布矩阵是(12)的第二列 $\mathbf{\Delta}_2$．留给读者验证二矢量 $\mathbf{\Delta}_2$ 及 $\Phi^{-1}\mathbf{\Delta}_2$ 是线性独立的．这时可以转换到原点的一切状态的子空间是二维的．读者还可验证若

控制施加于点 3，因此 $\mathbf{B}=[0\quad 0\quad 1]^T$，则三个矢量 $\mathbf{\Delta}_3, \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{\Delta}_3, \mathbf{\Phi}^{-2}\mathbf{\Delta}_3$ 是线性独立的. 在这种情况，系统是完全可控制的. 利用适当的控制，任何初态在有限时间内都可转换到原点.

对于包含一个控制矢量序列 $\mathbf{u}(k)$ 的情况，定义 9.3-1 的推广是显然的，事实上只要以 $\mathbf{u}(k)$ 代替 $u_1(k)$ 即可，定理 9.3-1 的相应的推广是下列定理.

定理 9.3-2 方程(2)的多输入离散时间系统是完全可控制的，当且仅当 n 个 np 矢量：$\mathbf{\Delta}, \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{\Delta}, \cdots, \mathbf{\Phi}^{-n+1}\mathbf{\Delta}$ 是线性独立的. 或者，换言之，当且仅当 $n\times np$ 矩阵

$$[\mathbf{\Delta}\quad \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{\Delta}\cdots\mathbf{\Phi}^{-n+1}\mathbf{\Delta}]$$

有秩 n.（也可参看习题 9.15.）

定理 9.3-2 的证明实质上与定理 9.3-1 的证明相同. 详细推证作为练习留给读者（习题 9.8）.

再一次考察图 9.3-2 的系统以说明定理 9.3-2. 例如设想控制变量 u_1 及 u_2 同时施加于点 1 及点 2. 相应的矩阵 $\mathbf{B}$ 是

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \tag{15}$$

因此分布矩阵 $\mathbf{\Delta}$ 是

$$\mathbf{\Delta}=[\mathbf{\Delta}_1\quad \mathbf{\Delta}_2]$$

其中 $\mathbf{\Delta}_1$ 和 $\mathbf{\Delta}_2$ 是(12)所定义的矩阵的第一列及第二列. 利用定理 9.3-2 研究 3×6 矩阵

$$[\mathbf{\Delta}_1\quad \mathbf{\Delta}_2\quad \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{\Delta}_1\quad \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{\Delta}_2\quad \mathbf{\Phi}^{-2}\mathbf{\Delta}_1\quad \mathbf{\Phi}^{-2}\mathbf{\Delta}_2] \tag{16}$$

的秩. 由(12)显然 $\mathbf{\Delta}_1$ 与 $\mathbf{\Delta}_2$ 是线性独立的，所以秩至少为 2. 留给读者证明秩就是 2（习题 9.9）. 对流图稍加观察便可直观地看出秩只能是 2. 在点 1 和点 2 的控制仍不能影响 x_3.

可观测性

可控制性的"对偶"是可观测性. 在下节里我们将正式定义由

卡尔曼[1960]引入的对偶性概念．这里由直观引入可观测性的概念及其与可控制性的对偶关系．

如前所述，输出矩阵 $\mathbf{C}$ 确定了系统的输出是如何受约束的．如果 $\mathbf{C}^{-1}$ 存在，一切状态变量都可测量．然而一般说来 $\mathbf{C}^{-1}$ 不存在，因而发生的问题是给予足够次数的测量是否能决定一切状态变量的初始值(参看例 8.3-2)．

为了说明可观测性的概念，考察如图 9.3-3 所示的自由系统．

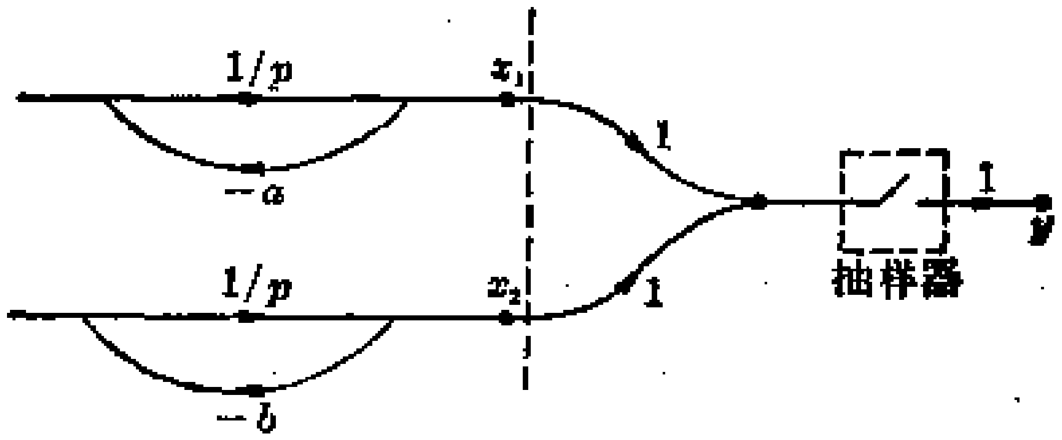


图 9.3-3　当 $a=b$ 系统是不可观测的

系统方程是

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a & 0\\ 0 & -b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \tag{17a}$$

$$y=[1\quad 1]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \tag{17b}$$

问题是已知输出 $y(t)$ 是每个 T 秒的抽样，如何决定初态 $\mathbf{x}_0$．

积分方程(17a)导致离散时间系统

$$\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{\Phi}(T)\mathbf{x}_k \tag{18a}$$

$$y_k=\mathbf{C}\mathbf{x}_k \tag{18b}$$

假设我们在时刻 $t_1=T$ 及 $t_2=2T$ 测量矢量．于是有数据

$$y_1=\mathbf{C\Phi x}_0$$

$$y_2=\mathbf{C\Phi}^2\mathbf{x}_0$$

也可写为形式

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C\Phi} \\ \mathbf{C\Phi}^2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_0 \tag{19}$$

(19)中系数矩阵是

$$\begin{bmatrix} e^{-aT} & e^{-bT} \\ e^{-2aT} & e^{-2bT} \end{bmatrix}$$

当 $a \neq b$ 时它有逆. 因此当 $a \neq b$ 时, 任何初态 x_0 可由两次测量决定. 另一方面, 若 $a = b$, 不论作多少次测量都不能决定一切初态. 当 $a \neq b$ 时系统是完全可观测的; 亦即任何初态都可确定. 当 $a = b$ 时系统是不可观测的; 亦即可能有一部分但不是全部初态可被确定. 类似于定义 9.3-1 有下列定义.

定义 9.3-2 初态 $\mathbf{x}(0)$ 称为可观测的, 如果它的确值可由有限观测序列 $y_1, y_2, \cdots, y_q$ 决定. 数 q 可依赖于 $\mathbf{x}(0)$. 如果每一个初态是可观测的, 系统称为完全可观测的.

和可控制性定义一样, 我们不理那些致使不能决定 $\mathbf{x}(0)$ 的确值的物理考虑. 例如噪声或不精确的测量等都排除在定义之外. 我们不对应着定理 9.3-1 来叙述, 而给出下面较一般的定理.

定理 9.3-3 多输出离散时间系统(2)是完全可观测的, 当且仅当 n 个 nm 矢量 $\mathbf{C}^T, (\mathbf{C\Phi})^T, \cdots, (\mathbf{C\Phi}^{n-1})^T$ 是线性独立的. 或者换言之, 当且仅当 $n \times nm$ 矩阵

$$[\mathbf{C}^T \quad (\mathbf{C\Phi})^T \quad \cdots \quad (\mathbf{C\Phi}^{n-1})^T]$$

有秩 n.

当 $\mathbf{y}$ 是标量时, 即 $m = 1$, 考察定理 9.3-3 的证明. 取观测值 $y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}$, 有

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C\Phi} \\ \vdots \\ \mathbf{C\Phi}^{n-1} \end{bmatrix} x_0 \tag{20}$$

系数矩阵是 $n\times n$ 的，并且当且仅当它有秩 n 时，亦即当且仅当系统是完全可观测时是非奇的．系数矩阵是定理中矩阵的转置．如果 $\mathbf{y}$ 是 m 维的，系数矩阵是 $nm\times n$ 的．如果这个矩阵的 n 个行矢量是线性独立的，我们可以删去其中 $nm-n$ 个线性相关的而解出 $\mathbf{x}_0$．

对偶性

定理 9.3-3 的证明与定理 9.3-1 的证明类似，可使我们对于可控制性与可观测性的对偶性质得到更深入的了解．我们介绍由卡尔曼[1960]作出的对偶性概念并且在离散时间系统说明它的意义．在以后各节中我们将利用此概念研究连续时间系统．对偶系统的概念如图 9.3-4 所示．

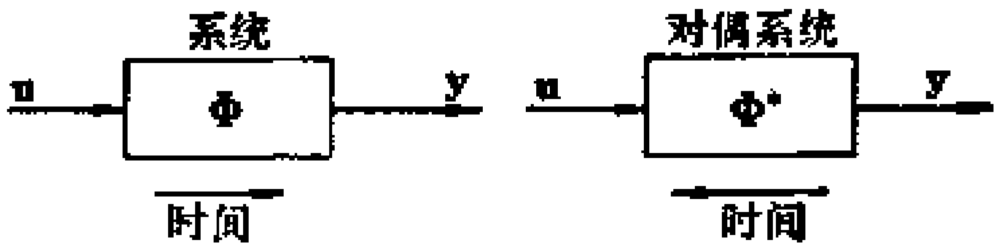


图 9.3-4　系统及其对偶的说明

利用系统方程，我们从

$$\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{\Phi}(T)\mathbf{x}_k+\mathbf{\Delta}(T)\mathbf{u}_k \tag{21a}$$

$$\mathbf{y}_k=\mathbf{C}\mathbf{x}_k \tag{21b}$$

开始．此系统的对偶由方程

$$\mathbf{z}_{k+1}=\mathbf{\Phi}^T(-T)\mathbf{z}_k+C^T\boldsymbol{\xi}_k \tag{22a}$$

$$\mathbf{v}_k=\mathbf{\Delta}^T(-T)\mathbf{z}_k \tag{22b}$$

来定义．在得到的对偶方程中，已经假定所有矩阵是实的．在§9.6将考虑复矩阵．实系统及其对偶方程总结如表 9.3-1．

对偶原理使我们断言：一个系统是完全可控制的，当且仅当它的对偶是完全可观测的，反之也对．例如把对偶方程代入定理 9.3-2得出定理 9.3-3，立即知此断言是成立的，反之也对．

表 9.3-1　系统及对偶系统方程

系　　统	对偶系统
$\Phi(T)$	$\Phi^T(-T)$
$\Delta(T)$	$\mathbf{C}^T$
$\mathbf{C}$	$\Delta^T(-T)$
t	$-t$

9.4. 定常连续系统

在这一节里给出关于定常线性系统的可观测性与可控制性的一些定义和定理. 首先给出由吉柏特[1963]得出的特殊结果. 我们从考察其微分转移矩阵 A 有相异特征根的系统开始. 把这样的系统称为相异系统. 为了详细说明, 先从标准方程开始:

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u} \tag{1a}$$

$$\mathbf{y}=\mathbf{C}\mathbf{x}+\mathbf{D}\mathbf{u} \tag{1b}$$

其中 $\mathbf{x}=n$ 维状态矢量

$\mathbf{y}=m$ 维输出矢量

$\mathbf{u}=p$ 维控制矢量

微分转移矩阵 $\mathbf{A}$, 控制矩阵 $\mathbf{B}$, 输出矩阵 $\mathbf{C}$ 及传输矩阵 $\mathbf{D}$ 都是常数矩阵.

如果系统是相异的, 即 $\mathbf{A}$ 有相异的特征根, 于是存在非奇矩阵 $\mathbf{T}$ 使

$$\mathbf{\Lambda}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}=\mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n] \tag{2}$$

所谓法坐标 z_i[Gilbert, 1963]是由线性变换

$$\mathbf{x}=\mathbf{T}\mathbf{z} \tag{3}$$

定义的. 于是标准方程的法式表示法化为

$$\dot{\mathbf{z}}=\mathbf{\Lambda}\mathbf{z}+\mathbf{\Omega}\mathbf{u} \tag{4a}$$

$$\mathbf{y}=\mathbf{\Gamma}\mathbf{z}+\mathbf{D}\mathbf{u} \tag{4b}$$

其中

$$\Omega = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} \tag{5a}$$

$$\Gamma = \mathbf{CT} \tag{5b}$$

用下例说明之.

例 9.4-1 考察图 9.4-1 所示的控制系统

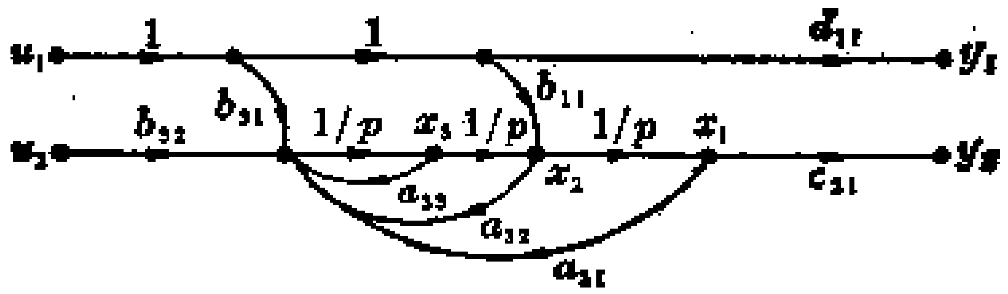


图 9.4-1 例 9.4-1 的控制系统(标准形式)

按图所示的状态可写为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{6a}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{6b}$$

设 $a_{31}=-6$, $a_{32}=-11$, $a_{33}=-6$, 于是矩阵 **A** 相同于例 4.7-1 的矩阵, 在那个例子里我们说 **A** 相似于对角形矩阵

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \tag{7}$$

使 **A** 对角形化的矩阵 **T** 已在例 4.7-3 中算出. 它的逆为

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 \\ -6 & -8 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

利用例 4.7-3 的 **T** 及(8)式的 $\mathbf{T}^{-1}$, 得出下列矩阵

$$\Omega = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6b_{11}+b_{31} & b_{32} \\ -6b_{11}-2b_{31} & -2b_{32} \\ 2b_{11}+b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\Gamma = CT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{21} & c_{21} \end{bmatrix} \tag{10}$$

对应于法式方程的流图作出如图 9.4-2.

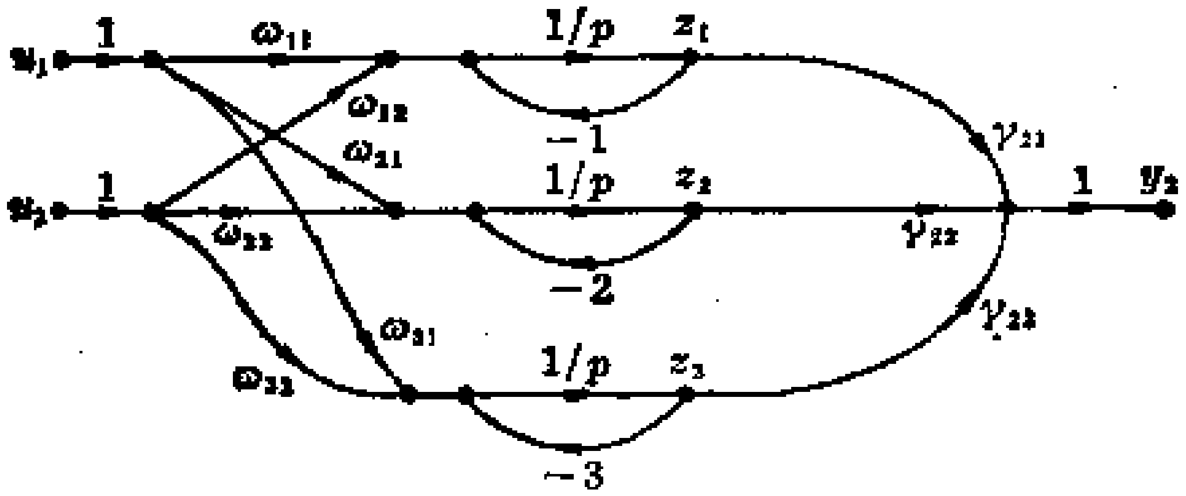


图 9.4-2 例 9.4-1 的控制系统(法式)

利用法式方程有下列定义.

定义 9.4-1 系统是可控制的,如果 Ω 中没有为零的行.

这里假设 Ω 的秩是 p, 因此 p 表示控制信号的有效个数. 为了说明此定义,假设(9)中元素 ω_{31} 及 ω_{32} 是零. 于是由方程组明显看出,甚至由图 9.4-2 更明显地看出控制 u_1 及 u_2 对状态变量 z_3 没有影响. 由于 z_3 不受控制的影响,称其为不可控制的. 一般说来,在法式方程中对应于 Ω 中的零行的坐标或状态变量 z_i 称为不可控制的. 对应于 Ω 中非零行的状态变量 z_i 称为可控制的.

可观测性可用同样方法来定义. 考虑纯动态系统 (即 $\mathbf{D}=0$) 且假设 $\mathbf{C}$ 的秩为 m. 于是有下列定义.

定义 9.4-2 系统称为可观测的,如果 Γ 中没有为零的列.

对应于 Γ 中零列的状态变量称为不可观测的,对应于非零列的状态变量称为可观测的.

虽然上述的可观测性与可控制性的定义似乎看来和 § 9.3 及引言中给出的定义不一样,但它们确实是等价的.

现在考察相异系统 S(或它的状态空间)的"法式分解". 可以看出可观测性与可控制性存在四种可能的组合,即系统可能是:

1. 可控制且可观测的(S_{co})

2. 可控制而不可观测的(S_c)

3. 可观测而不可控制的(S_o)

4. 不可观测且不可控制的(S_N)

对于相异系统各个的法式方程是

1. 可控制且可观测的(S_{co})

$$\dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{\Omega}_1 \mathbf{u}_1$$
$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{\Gamma}_1 \mathbf{z}_1$$

2. 可控制而不可观测的(S_c)

$$\dot{\mathbf{z}}_2 = \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{z}_2 + \mathbf{\Omega}_2 \mathbf{u}_2$$
$$\mathbf{y}_2 = 0$$

3. 可观测而不可控制的(S_0)

$$\dot{\mathbf{z}}_3 = \mathbf{\Lambda}_3 \mathbf{z}_3$$
$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{\Gamma}_3 \mathbf{z}_3$$

4. 不可观测且不可控制的(S_N)

$$\dot{\mathbf{z}}_4 = \mathbf{\Lambda}_4 \mathbf{z}_4$$
$$\mathbf{y}_4 = 0$$

结合上面的子系统的法式方程，得到相异系统的"法式分解"：

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 \\ \dot{\mathbf{z}}_3 \\ \dot{\mathbf{z}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{\Lambda}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{\Lambda}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{\Lambda}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_3 \\ \mathbf{z}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{\Omega}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{\Omega}_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} \tag{11a}$$

$$
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} \tag{11b}
$$

显然任何相异系统可分解为方程(11)的法式. 更一般，如§9.6所表明的，任何系统可分解为上述四种子系统，虽然矩阵块可能比方程(11)的稍微复杂. 系统分解为四个子系统，描述如图 9.4-3.

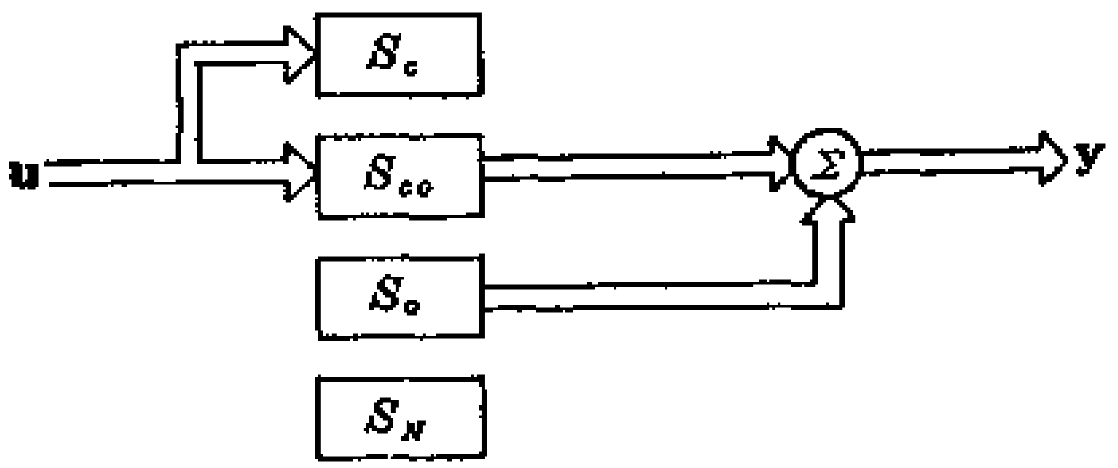


图 9.4-3 系统分解或分块为四个子系统

对于相异系统，吉柏特[1963]给出关于复合系统的可控制性与可观测性的一些定理. 特别是有下列定理.

定理 9.4-1 设 S 是由两个相异系统 S_1 及 S_2 并联形成的相异系统，如图 9.4-4. 则

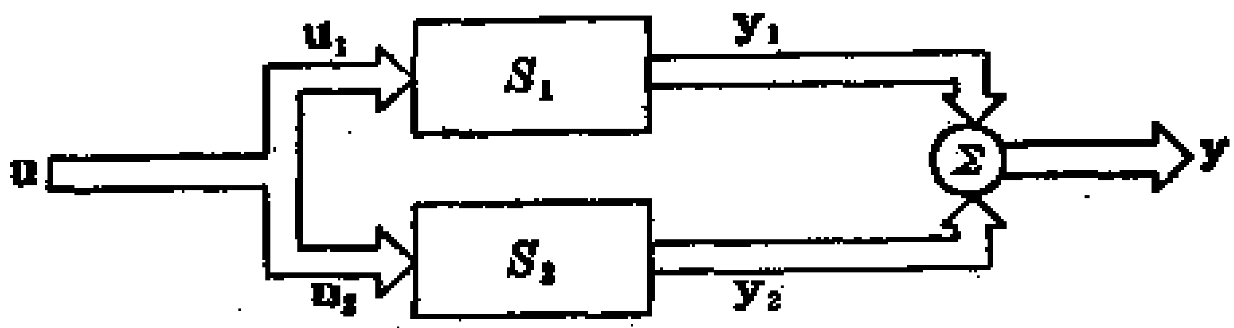


图 9.4-4 两个系统的并联

(i) S 的维数 n 是 $n=n_1+n_2$，这里 n_1, n_2 是 S_1 和 S_2 的维数.

(ii) S 的特征值是 S_1 与 S_2 的特征值.

(iii) S 是可控制的(可观测的)当且仅当 S_1 与 S_2 二者都是可控制的(可观测的).

为了证明此定理，假设 S_1 与 S_2 的方程已用法式给出. 先写

一般方程

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{z}}_1\\ \dot{\mathbf{z}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{\Lambda}_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{z}_1\\ \mathbf{z}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{\Omega}_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{\Omega}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1\\ \mathbf{u}_2\end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\ \mathbf{y}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{\Gamma}_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{\Gamma}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{z}_1\\ \mathbf{z}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{D}_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1\\ \mathbf{u}_2\end{bmatrix} \tag{13}$$

今由图 9.4-4，输出约束是使得

$$\mathbf{y}=\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2=[\mathbf{\Gamma}_1 \quad \mathbf{\Gamma}_2]\begin{bmatrix}\mathbf{z}_1\\ \mathbf{z}_2\end{bmatrix}+[\mathbf{D}_1+\mathbf{D}_2]\mathbf{u} \tag{14}$$

由于输入约束 $\mathbf{u}=\mathbf{u}_1=\mathbf{u}_2$，得出方程(14)右边最后一项．而且这个约束导致

$$\mathbf{\Omega}=\begin{bmatrix}\mathbf{\Omega}_1\\ \mathbf{\Omega}_2\end{bmatrix} \tag{15}$$

由方程(12)就得出定理中的(i)及(ii)．由(14)及(15)得出定理中的(iii)．为了说明定理 9.4-1 只可应用于相异系统，给出下列例题．

例 9.4-2　两个标量系统

$$S_1:\ \dot{x}_1=-\lambda x_1+b_{11}u_1$$

$$S_2:\ \dot{x}_2=-\lambda x_2+b_{21}u_2$$

在输入受约束，以致 $u_1=u_2=u$．两个系统都是相异的且可控制的，但有相同的特征根 λ．两个系统在输入的并联导致方程

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\lambda & 0\\ 0 & -\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_{11}\\ b_{21}\end{bmatrix}u$$

这些状态方程是法式的，如果 b_{11} 与 b_{21} 不是零，人们可以试图从定义 9.4-1 得出系统是可控制的结论．为了证明这个系统确实是不可控制的，通过非奇变换

$$\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{21} & -b_{11}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

变换坐标．新的状态方程是

$$\begin{bmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\lambda & 0\\ 0 & -\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ b_{21}\end{bmatrix}u$$

这就说明系统是不可控制的．实际上，我们不能控制状态 $z_1=b_{21}x_1-b_{11}x_2$，但能控制状态 x_2．与这个问题对偶的问题已在§9.3研究过．图9.3-3的系统当 $a=b$，即有相等特征值时，已证明是不可观测的．

如果两个相异系统是串联的，方程(12)与(13)的约束使 $\mathbf{y}_1=\mathbf{u}_2$．这个约束导致方程

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{z}}_1\\ \dot{\mathbf{z}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{\Lambda}_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{\Omega}_2\mathbf{\Gamma}_1 & \mathbf{\Lambda}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{z}_1\\ \mathbf{z}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{\Omega}_1\\ \mathbf{\Omega}_2\mathbf{D}_1\end{bmatrix}\mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{y}_2=[\mathbf{D}_2\mathbf{\Gamma}_1 \quad \mathbf{\Gamma}_2]\begin{bmatrix}\mathbf{z}_1\\ \mathbf{z}_2\end{bmatrix}+\mathbf{D}_2\mathbf{D}_1\mathbf{u}_1$$

利用变换

$$\begin{bmatrix}\mathbf{z}_1\\ \mathbf{z}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{M} & \mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\xi}_1\\ \boldsymbol{\xi}_2\end{bmatrix}$$

可把这些方程化为法式．留给读者自己做出并推出下列定理．

定理 9.4-2 设 S 是由两个相异系统 S_1 与 S_2 串联而成的相异系统；则

(i) S 的维数是 $n=n_1+n_2$．

(ii) S 的特征值是 S_1 与 S_2 的特征值．

(iii) S 可能是可控制的(可观测的)仅当 S_1 与 S_2 是可控制的(可观测的)．

(iv) 若 S_1 与 S_2 是可控制的(可观测的)，则 S 的不可控制的(不可观测的)的坐标来源于 $S_2(S_1)$．

用法坐标说明的可控制性和可观测性的定义是有吸引力的和简单明了的．然而它们没有提供确定系统状况的简单检验法．现在给出用系统标准方程的矩阵研究系统的可控制性的一个方法，它不依赖于相异特征根的假设．这个检验法由下面定理给出．

定理 9.4-3 定常系统(1)是完全可控制的，当且仅当 $n\times pn$ 矩阵 $\mathbf{Q}$

$$\mathbf{Q}=[\mathbf{B}\quad \mathbf{AB}\quad \cdots\quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

有秩 n. 如果系统是完全可控制的，则任一状态 $\mathbf{x}(t_1)$ 在有限长时间区间内可转换为任何其它状态 $\mathbf{x}(t_2)$.

把定理 9.4-3 的证明推迟到 § 9.5. 这里用它检查例 9.3-1, 9.4-1 和 9.4-2 中系统的可控制性以说明它的应用.

从离散时间系统例 9.3-1 开始. 首先注意到抽样的引入是对控制的约束，从而抽样不能改善可控制性. 因此如果连续时间系统是不可控制的，那么抽样数据系统也必然是不可控制的. 因此，如果检查连续时间系统的可控制性是容易的，我们应该这样作并且问：什么时候抽样将破坏可控制性？定理 9.4-5 提供了答案. 考察例 9.3-1 的目的是说明定理 9.4-3 结合定理 9.4-5 可应用于抽样数据系统.

类似于例 9.3-1 的做法，首先取

$$\mathbf{B}=[1\quad 0\quad 0]^T$$

应用定理 9.4-3, 得到 3×3 矩阵 $\mathbf{Q}_1$

$$\mathbf{Q}_1=\begin{bmatrix}1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\tag{16}$$

它有秩 1. 此系统是不可控制的. 现令

$$\mathbf{B}=[0\quad 1\quad 0]^T$$

得到

$$\mathbf{Q}_2=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\lambda\\ 1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\tag{17}$$

它有秩 2, 如例 9.3-1 中以前的结论. 若令 $\mathbf{B}=[0\quad 0\quad 1]^T$, 则

$$
\mathbf{Q}_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2\lambda \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix} \tag{18}
$$

它有秩 3.

对于矩阵(9.3-15)，有 3×6 矩阵

$$
\mathbf{Q}_4=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda & 1 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 1 & 0 & \lambda & 0 & \lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{19}
$$

因第三行是零，它有秩 2. 我们看到由定理 9.4-3 得到的结果与由定理 9.3-2 得到的相同. 显然，在此情况用定理 9.4-3 容易得多.

应用定理 9.4-3 于例 9.4-1，得到 3×6 矩阵

$$
\mathbf{Q}=
\begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 & b_{31} & b_{32} \\ 0 & 0 & b_{31} & b_{32} & -6b_{11}-6b_{31} & -6b_{32} \\ b_{31} & b_{32} & -6b_{11}-6b_{31} & -6b_{32} & 36b_{11}+25b_{31} & 25b_{32} \end{bmatrix} \tag{20}
$$

观察此矩阵的前三列，表明 $\mathbf{Q}$ 当 $b_{11}b_{32}b_{31}\neq 0$ 时有秩 3. 其它条件显然可由 $\mathbf{Q}$ 的列来决定.

现考察最后一例. 在例 9.4-2 中有

$$
\mathbf{A}=-\lambda\mathbf{I} \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}
$$

所以 $\mathbf{Q}$ 是

$$
\mathbf{Q}=\begin{bmatrix} b_{11} & -\lambda b_{11} \\ b_{21} & -\lambda b_{21} \end{bmatrix}
$$

如前所得到的，它的秩为 1.

对偶性

系统(1)的“对偶”是

$$\dot{\mathbf{z}}=\mathbf{A}^*\mathbf{z}+\mathbf{C}^*\mathbf{v} \tag{21a}$$

$$\mathbf{w}=\mathbf{B}^*\mathbf{z}+\mathbf{D}^*\mathbf{v} \tag{21b}$$

其中 $\mathbf{A}^*$ 是 $\mathbf{A}$ 的共轭转置，等等．如果系统矩阵是实的，则 $\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^T$，等等．定理 9.4-3 的对偶导致可观测性定理：

定理 9.4-4 纯动态定常系统(1)是完全可观测的，当且仅当 $n\times nm$ 矩阵 $\mathbf{P}$，

$$\mathbf{P}=[\mathbf{C}^* \quad \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* \cdots \quad \mathbf{A}^{*n-1}\mathbf{C}^*]$$

有秩 n．

由 §9.3 的结果定理 9.4-4 成立，在那里我们断言系统是可观测的(可控制的)当且仅当它的对偶是可控制的(可观测的)．因此系统(1)的可观测性可用检查它的对偶方程(21)的可控制性来确定．

抽样定理

定理 9.4-3 及对偶性概念提供了利用标准形表示法例如方程(1)的矩阵检验可观测性和可控制性的方法．抽样定理使我们利用定理 9.4-3 及对偶性概念来研究抽样数据系统．利用方程(1)，有下列抽样定理[Kalman, Ho, 和 Narendra, 1962]．

定理 9.4-5 一个系统在没有抽样时是完全可控制的(可观测的)，则引入抽样以后仍旧是完全可控制的(可观测的)，如果对于 $\mathbf{A}$ 的每个特征值 λ_i，下列条件成立：每个 $\mathrm{Re}\lambda_i=\mathrm{Re}\lambda_j$ 意味着 $\mathrm{Im}(\lambda_i-\lambda_j)\neq\frac{2\pi r}{T}$，其中 r 是正整数，T 是抽样区间．若 $p=1(m=1)$，此条件也是必要的．

由此定理，显然只要适当选取抽样区间 T，可控制性(可观测性)的丧失可以避免．假设考察例 5.6-3 中的矩阵．特征值求得为 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=i\theta$ 和 $\lambda_3=-i\theta$．λ_2 与 λ_3 的实部相等，即等于零．对于虚部

$$\mathrm{Im}(\lambda_2-\lambda_3)=2\theta$$

于是，按照此定理如果

$$\theta\neq\frac{\pi r}{T} \tag{22}$$

可控制性将保持.

在给出抽样定理的例子之前，我们介绍用系统的约当型表示法的可控制性的概念. 设矩阵 $\mathbf{A}$ 有特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，不一定相异. 联系每个 λ_i 的是一个 $r_i\times r_i$ 约当块. 假设 $\mathbf{P}$ 是非奇矩阵，线性变换

$$\mathbf{x}=\mathbf{P}\mathbf{z} \tag{23}$$

化方程(1)为约当型

$$\dot{\mathbf{z}}=\mathbf{J}\mathbf{z}+\mathbf{G}\mathbf{u} \tag{24}$$

其中

$$\mathbf{J}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\qquad \mathbf{G}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}$$

如我们已经看到的，约当矩阵 $\mathbf{J}$ 有拟对角形形式

$$\mathbf{J}=\mathrm{diag}[\mathbf{J}_1(\lambda_1),\mathbf{J}_2(\lambda_2),\cdots,\mathbf{J}_s(\lambda_s)] \tag{25}$$

现在利用方程(24)作为出发点，给出关于可控制性的一个定理. 为了不陷入细节的讨论，只考察(4.7-90)的约当矩阵而不是一般的(25)式. 图 9.4-5 是(4.7-90)的约当矩阵的流图，它将有助于讨论. 首先考察 $\mathbf{G}$ 是 $n\times 1$ 矩阵的特殊情况，且记 $\mathbf{G}=\mathbf{g}$. 按照(25)的分块把 $\mathbf{g}$ 分块为

$$\mathbf{g}=[g_{11}g_{12}\cdots g_{1r_1}\vdots g_{21}\cdots g_{2r_2}\vdots\cdots\vdots g_{s1}\cdots g_{sr_s}]^T$$

于是就能把例 9.3-1 和9.4-2的结果叙述为下面的定理[Kalman, Ho 和 Narendra, 1962].

定理 9.4-6 方程(24)的系统，其中 $\mathbf{G}=\mathbf{g}$，是完全可控制的，当且仅当

(i) 没有两个约当块包含相同特征值.

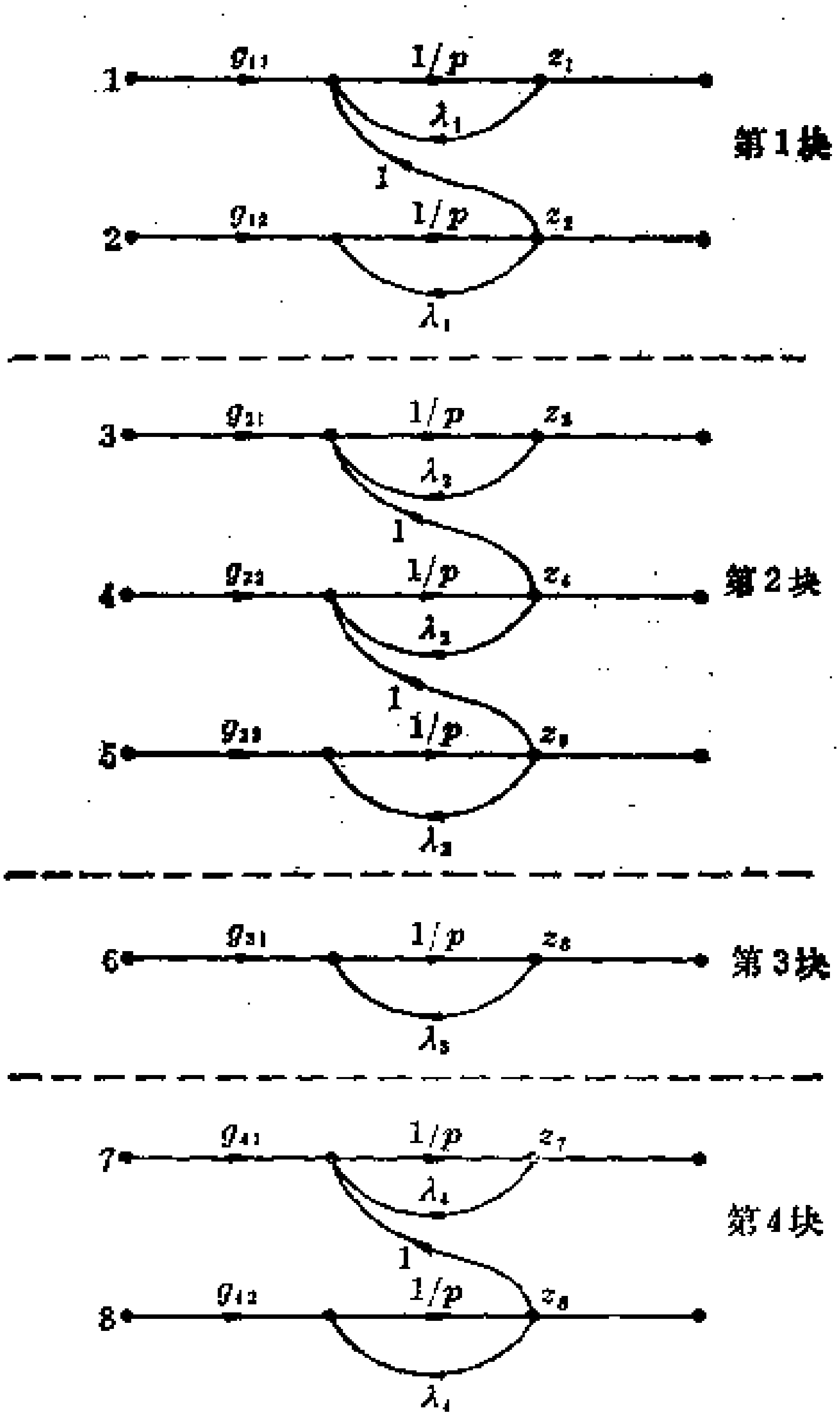


图 9.4-5 (4.7-90)中约当矩阵的流图

(ii) g 的(i, r_i)元素对一切 $i=1, 2, \cdots, s$ 是非零的.

定理的部分(i)可由例 9.4-2 的结果推出. 部分(ii)由例 9.3-1 的结果推出. 图 9.4-5 的系统是完全可控制的，如果所有特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 及 λ_4 是相异的且 g 的元素中第二(g_{12})、第五(g_{23})、第六(g_{31})及第八(g_{42})不为零. 如果令 G 是 $n\times p$ 的且 $p>1$, 则定理 9.4-6中部分(i)不再是必需的，而部分(ii)改写为: G 中每行(i, r_i)

包含一个非零元素．把这些结论叙述为下列定理．

定理 9.4-7 方程(24)的系统是完全可控制的，当且仅当 G 中第(i, r_i)行有非零元素．

实质上，定理 9.4-5 是定理 9.4-6 的离散时间的类似物．定理 9.4-5 中特征值的条件对应于定理 9.4-6 的部分(i)．为了说明，考察下列例子．

例 9.4-3 设连续系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_{11}\\ b_{21}\end{bmatrix}u$$

以定常速率 T 抽样．抽样数据系统是

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\ x_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 T} & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\Delta_{11}(T)\\ \Delta_{21}(T)\end{bmatrix}u(k) \tag{26}$$

系统(26)类似于例 9.4-2 中的系统．设 $\lambda_1\neq\lambda_2$；否则由定理 9.4-3 系统是不可控制的．但是设转移矩阵的特征值是相等的，即 $e^{\lambda_1 T}=e^{\lambda_2 T}$．于是可作变量变换

$$\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Delta_{21} & -\Delta_{11}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

得到新的方程组

$$\begin{bmatrix}z_1(k+1)\\ z_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 T} & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1(k)\\ z_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \Delta_{21}\end{bmatrix}u$$

并得出结论：此系统是不可控制的．

实际上，例 9.4-3 说明具有 $n\times 1$ 分布矩阵的离散时间系统是可控制的，如果转移矩阵没有两个约当块包含相同的特征值，亦即如果

$$e^{\lambda_k T}\neq e^{\lambda_j T}\qquad \text{除非 } k=j \tag{27}$$

的话．为了连结(27)与定理 9.4-5 的条件，令 $\lambda_k=a+ib$ 及 $\lambda_j=a-ib$，则 $e^{\lambda_k T}=e^{\lambda_j T}$ 意味着

$$e^{ibT}=e^{-ibT}$$

它当 $bT=\pi r$ 是对的．

作为结束，应注意当 $p>1(m>1)$ 时条件(27)或定理 9.4-5 的特征值条件不再是必需的.

9.5. 时变系统

在这一节里考察时变线性系统并推广可控制性的概念、定义及定理. 我们将要看到 § 9.3 和 § 9.4 的结果是这里出现的结果的特殊情况. 为了使讨论简短，我们集中绝大部分精力于可控制性的概念，并且依靠对偶性原理推广这些结果于可观测性. 首先从标准系统开始.

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}+\mathbf{B}(t)\mathbf{u} \tag{1a}$$

$$\mathbf{y}=\mathbf{C}(t)\mathbf{x}+\mathbf{D}(t)\mathbf{u}. \tag{1b}$$

可控制性

下列定义正式引出可控制性的概念.

定义 9.5-1 方程(1)的系统定义为完全状态可控制的，如果对任一时刻 t_0，每个初态 $\mathbf{x}(t_0)$ 在有限时间 $t_1\geq t_0$ 可转换为任何另一个状态 $\mathbf{x}(t_1)$.

状态可控制性的概念作为输出可控制性反面是由克朗因莱尔和萨拉奇克[1964]引进的. 他们认为人们要求控制的只是输出而不必是所有的状态. 例 9.4-2 说明的系统不是状态可控制的. 然而按照下列定义它是输出可控制的.

定义 9.5-2 方程(1)的系统是完全输出可控制的，如果对任何时刻 t_0 每个初态 $\mathbf{x}(t_0)$ 可在有限时刻 $t_1\geq t_0$ 转换为任一输出 $\mathbf{y}(t_1)$.

首先对于纯动态系统(即 $\mathbf{D}=0$)决定输出可控制性的条件. 按照(5.7-11)有

$$\mathbf{y}^d(t)=\mathbf{y}(t)-\mathbf{y}^0(t)=\int_{t_0}^{t}\mathbf{H}_y(t,\xi)\mathbf{u}(\xi)d\xi \tag{2}$$

其中 $$\mathbf{y}^0(t)=\mathbf{C}(t)\mathbf{\Phi}(t,t_0)\mathbf{x}(t_0) \tag{3}$$
因而从 $\mathbf{x}(t_0)$获得任何 $\mathbf{y}(t_1)$的问题变为由零初始条件，即从原点获得 $\mathbf{y}^d(t_1)$的问题.

设状态空间X是实的，且定义对称的非负定的线性变换

$$\mathbf{W}_y(t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\mathbf{H}_y(t_1,\xi)\mathbf{H}_y^T(t_1,\xi)d\xi \tag{4}$$

于是有下列定理.

定理 9.5-1 从状态空间X的原点获得在输出空间Y的$\mathbf{y}^d(t_1)$是可能的，当且仅当$\mathbf{y}^d(t_1)$属于$\mathbf{W}_y$的值域；亦即$\mathbf{y}^d(t_1)$是在$R[\mathbf{W}_y(t_0,t_1)]$内.

为了证明充分性，假设$\mathbf{y}^d(t_1)$是在$\mathbf{W}_y$的值域内. 亦即对某个$\mathbf{z}^0\neq 0$有

$$\mathbf{W}_y(t_0,t_1)\mathbf{z}^0=\mathbf{y}^d(t_1) \tag{5}$$

则由控制

$$\mathbf{u}(\xi)=\mathbf{H}_y^T(t,\xi)\mathbf{z}^0 \tag{6}$$

在输出空间可获得$\mathbf{y}^d(t_1)$，只要把(6)代入(2)就容易证实. 为了证明必要性，考察输出空间Y的正交分解

$$Y=R[\mathbf{W}_y(t_0,t_1)]\oplus N[\mathbf{W}_y(t_0,t_1)] \tag{7}$$

由定理 3.7-1 及$\mathbf{W}_y$是对称的事实就得出此分解. 现在证明在零空间$N[\mathbf{W}_y(t_0,t_1)]$没有输出是输出可控制的. 利用反证法. 设某个

$$\mathbf{y}^d(t_1)=\mathbf{y}^d\neq\mathbf{0}$$

属于$N[\mathbf{W}_y(t_0,t_1)]$. 于是有

$$\begin{aligned}(\mathbf{y}^d,\mathbf{W}_y(t_0,t_1)\mathbf{y}^d)&=\int_{t_0}^{t_1}(\mathbf{y}^d,\mathbf{H}_y(t_1,\xi)\mathbf{H}_y^T(t_1,\xi)\mathbf{y}^d)d\xi\\&=\int_{t_0}^{t_1}\|\mathbf{H}_y^T(t_1,\xi)\mathbf{y}^d\|^2d\xi=0\end{aligned} \tag{8}$$

因为被积函数是非负的，得出

$$\mathbf{H}_y^T(t_1,\xi)\mathbf{y}^d=0 \tag{9}$$

现在设 $\mathbf{y}^d$ 可以由某个控制 $\mathbf{u}'$ 获得；亦即系统是输出可控制的. 然后由(2)得

$$0<\|\mathbf{y}^d\|^2=\left(\mathbf{y}^d,\int_{t_0}^{t_1}\mathbf{H}_y(t_1,\xi)\mathbf{u}'(\xi)d\xi\right)$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}(\mathbf{H}_y^T(t_1,\xi)\mathbf{y}^d,\mathbf{u}'(\xi))d\xi=0$$

右端为零是由于(9). 这个矛盾就完成了证明. 由此证明我们得出结论：完全输出可控制性的必要充分条件是

$$\mathbf{H}_y^T(t_1,\xi)\boldsymbol{\lambda}\neq 0 \qquad \text{对 } Y \text{ 中的 } \boldsymbol{\lambda}\neq 0 \text{ 及 } t_0\leqslant\xi\leqslant t_1 \tag{10}$$

这个条件表示在时间区间 (t_0,t_1) 上 $\mathbf{H}_y(t_1,\xi)$ 的各行是线性独立的. (4)也表示同样的条件. 换言之，$\mathbf{H}_y(t_1,\xi)$ 的各行是线性独立的当且仅当 $\mathbf{W}_y(t_0,t_1)$ 是非奇的. 我们利用这些观察的结果建立定理 9.5-2. 首先研究由(10)式表示的条件的几何意义.

我们看到如果 $\boldsymbol{\lambda}$ 是违反(10)的某个矢量，则利用(2)有

$$(\boldsymbol{\lambda},\mathbf{y}^d(t_1))=\int_{t_0}^{t_1}[\boldsymbol{\lambda},\mathbf{H}_y(t_1,\xi)\mathbf{u}(\xi)]d\xi=0 \tag{11}$$

由(11)可得出结论：不论 $\mathbf{u}(t)$ 如何选择恒有

$$(\boldsymbol{\lambda},\mathbf{y}^d(t_1))=0 \tag{12}$$

因而在 $\boldsymbol{\lambda}$ 方向上没有点(即矢量)可以达到. 换言之，一切不可控制的输出的集合是 Y 的子空间. 不可控制状态的子空间是零空间 $N[\mathbf{W}_y(t_0,t_1)]$，它是值域空间 $R[\mathbf{W}_y(t_0,t_1)]$的正交补空间. 图 9.5-1 是它们的几何描述. 由(7)，输出空间的任一矢量 $\mathbf{y}^d$ 可写作

$$\mathbf{y}^d=\mathbf{y}_p^d+\mathbf{y}_\perp^d \tag{13}$$

其中 $\mathbf{y}_p^d$ 属于 $R[\mathbf{W}_y]$，$\mathbf{y}_\perp^d$ 属于 $N[\mathbf{W}_y]$. 由于 $R[\mathbf{W}_y]$是 $N[\mathbf{W}_y]$的正交补空间，于是有$(\mathbf{y}_p^d,\mathbf{y}_\perp^d)=0$，如图所示.

总结前面的观察为下列定理.

定理 9.5-2 方程(1)的纯动态系统在 (t_0,t_1) 上是输出可控

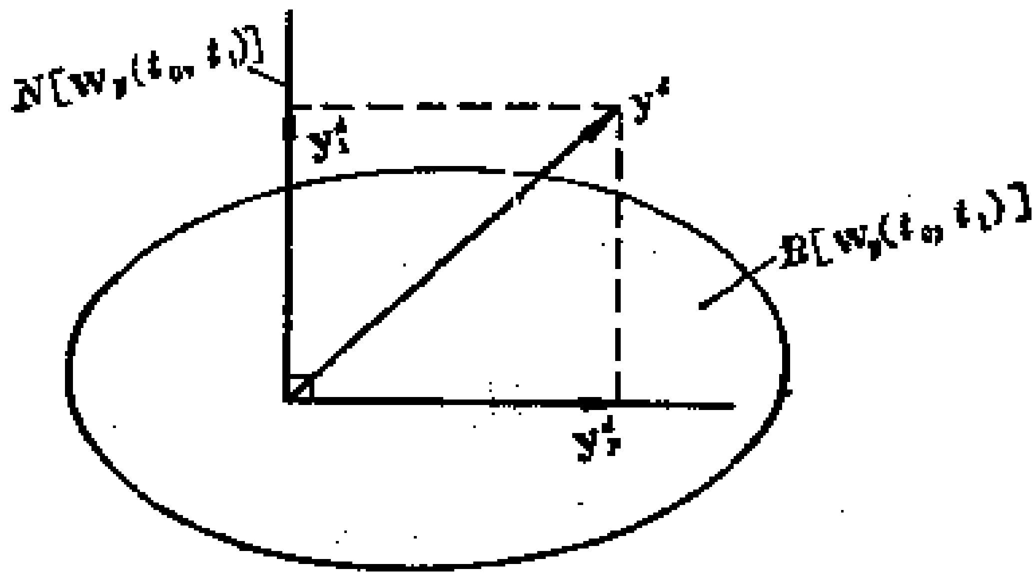


图 9.5-1　输出空间的分解

制的，当且仅当矩阵$\mathbf{H}_y(t_1,\xi)$的各行是线性独立的，如(10)所表示的；或者当且仅当$\mathbf{W}_y(t_0,t_1)$是非奇的.

现在考察状态可控制性. 回忆§5.7中$\mathbf{H}_x$及$\mathbf{H}_y$的定义，看出

$$\mathbf{H}_y(t,\xi)=\mathbf{C}(t)\mathbf{H}_x(t,\xi) \tag{14}$$

如果简单地令$\mathbf{C}(t)=\mathbf{I}$，前面的绝大部分结果是适用的. 因而只要对这些结果作微小的修改. 与定理 9.5-1 对应的是下列定理(也可参看习题 9.35).

定理 9.5-3　转换状态空间X的状态$\mathbf{x}^d(t_1)$为原点是可能的，当且仅当$\mathbf{x}^d(t_1)$属于$\mathbf{W}_x(t_0,t_1)$的值域.

为了证明定理 9.5-3，回忆方程(1)的运动由(参看(5.7-8))

$$\mathbf{x}^d(t)=\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^0(t)=\int_{t_0}^{t}\mathbf{H}_x(t,\xi)\mathbf{u}(\xi)d\xi \tag{15}$$

给出，其中

$$\mathbf{x}^0(t)=\mathbf{\Phi}(t,t_0)\mathbf{x}(t_0) \tag{16}$$

证明显然类似于定理 9.5-1 的证明，只要作微小的修改，因此把详细过程留给读者.

如果我们定义在t_0可控制的状态的集合为$S(t_0)$，前面的结果可进一步写成下列定理：

定理 9.5-4 集合 $S(t_0)$ 是 $\mathbf{W}_x(t_1, t_0)$ 的值域；亦即

$$S(t_0)=R[\mathbf{W}_x(t_0, t_1)]$$

这里 t_1 是使 $\mathbf{W}_x(t_0, t_1)$ 有最大秩数的 t 的任一值.

今以关于直接传输即 $\mathbf{D}\neq\mathbf{0}$ 的系统的输出可控制性的定理来结束讨论. 我们将不证明此定理，有兴趣的读者可参考克朗因莱尔及萨拉奇克[1964].

定理 9.5-5 方程(1)的系统在 (t_0, t_1) 上是完全输出可控制的，当且仅当(10)的扩充条件成立：

$$\mathbf{H}_y^T(t_1, \xi)\lambda\neq\mathbf{0} \qquad 和(或) \qquad \mathbf{D}^T(t_1)\lambda\neq\mathbf{0}$$

对 Y 中之 λ 及 $t_0\leqslant\xi\leqslant t_1$，或者，等价地，矩阵

$$\mathbf{W}_y(t_0, t_1)+\mathbf{D}(t_1)\mathbf{D}^T(t_1)$$

是非奇的.

可观测性

考察方程(1)的自由系统，且叙述可观测性概念为下列定义.

定义 9.5-3 方程(1)的纯动态系统称为在时间区间 (t_0, t_1) 上是完全可观测的，如果对于任何 t_0 在状态空间 X 中每个初态 $\mathbf{x}(t_0)$ 可由在 (t_0, t_1) 上零输入响应 $\mathbf{y}(t)$ 来确定.

方程(1)的自由运动由下式给出：

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{\Phi}(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) \tag{17a}$$

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}(t)\mathbf{\Phi}(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) \tag{17b}$$

由方程(17b)显然完全可观测性的必要条件是 $\mathbf{C}(t)\mathbf{\Phi}(t, t_0)$ 的各列是线性独立的. 用记号表示，这个条件可表为

$$\mathbf{C}(t)\mathbf{\Phi}(t, t_0)\mathbf{x}^0\neq 0 \quad 对于\ t_0\leqslant t\leqslant t_1\ 及\ X\ 中的一切\ \mathbf{x}^0\neq\mathbf{0} \tag{18}$$

显然，如果有某个 $\mathbf{x}^0\neq\mathbf{0}$ 使条件(18)不成立，则 $\mathbf{x}^0$ 永远达不到输出空间. 条件(18)也是充分的，这可由下面看出. 左乘(17b)以 $\mathbf{\Phi}^T(t, t_0)\mathbf{C}^T(t)$，且在 (t_0, t_1) 上积分之.

$$\int_{t_0}^{t_1}\Phi^T(t,t_0)\mathbf{C}^T(t)\mathbf{y}(t)\,dt$$

$$=\left[\int_{t_0}^{t_1}\Phi^T(t,t_0)\mathbf{C}^T(t)\mathbf{C}(t)\ \Phi(t,t_0)\,dt\right]\mathbf{x}(t_0) \tag{19}$$

记

$$\mathbf{M}(t_1,t_0)=\int_{t_0}^{t}\Phi^T(t,t_0)\mathbf{C}^T(t)\mathbf{C}(t)\Phi(t,t_0)\,dt \tag{20}$$

$$\mathbf{n}(t_1,t_0)=\int_{t_0}^{t}\Phi^T(t,t_0)\mathbf{C}^T(t)\mathbf{y}(t)\,dt \tag{21}$$

关系(19)可写为

$$\mathbf{n}(t_1,t_0)=\mathbf{M}(t_1,t_0)\mathbf{x}(t_0) \tag{22}$$

现在如果 $\mathbf{C}(t)\Phi(t,t_0)$的各列是线性独立的，则矩阵$\mathbf{M}(t_1,t_0)$是非奇的，并且有解

$$\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{M}^{-1}(t_1,t_0)\mathbf{n}(t_1,t_0) \tag{23}$$

这就证明了下列定理.

定理 9.5-6 方程(1)的纯动态系统在(t_0,t_1)上是完全可观测的，当且仅当条件(18)成立. 或者等价地，当且仅当 $\mathbf{M}(t_1,t_0)$是非奇的.

我们可分解状态空间如下:

$$X=R[\mathbf{M}(t_1,t_0)]\oplus N[\mathbf{M}(t_1,t_0)] \tag{24}$$

可观测的状态的集合或子空间是 $R[\mathbf{M}(t_1,t_0)]$, 且不可观测的状态的子空间是 $N[\mathbf{M}(t_1,t_0)]$. 定理 9.5-6 断言，当 $R[\mathbf{M}(t_1,t_0)]$是整个状态空间X时，系统是完全可控制的. 按照分解式(24)，X中任何矢量 $\mathbf{x}$ 可写为

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}_p+\mathbf{x}_\perp \tag{25}$$

其中 $\mathbf{x}_p$ 是 $\mathbf{x}$ 在 $R[\mathbf{M}]$上的正投影，$\mathbf{x}_\perp$ 是 $\mathbf{x}$ 在 $N[\mathbf{M}]$上的正投影. 图 9.5-2 描述了(24)与(25)的几何意义.

对偶性

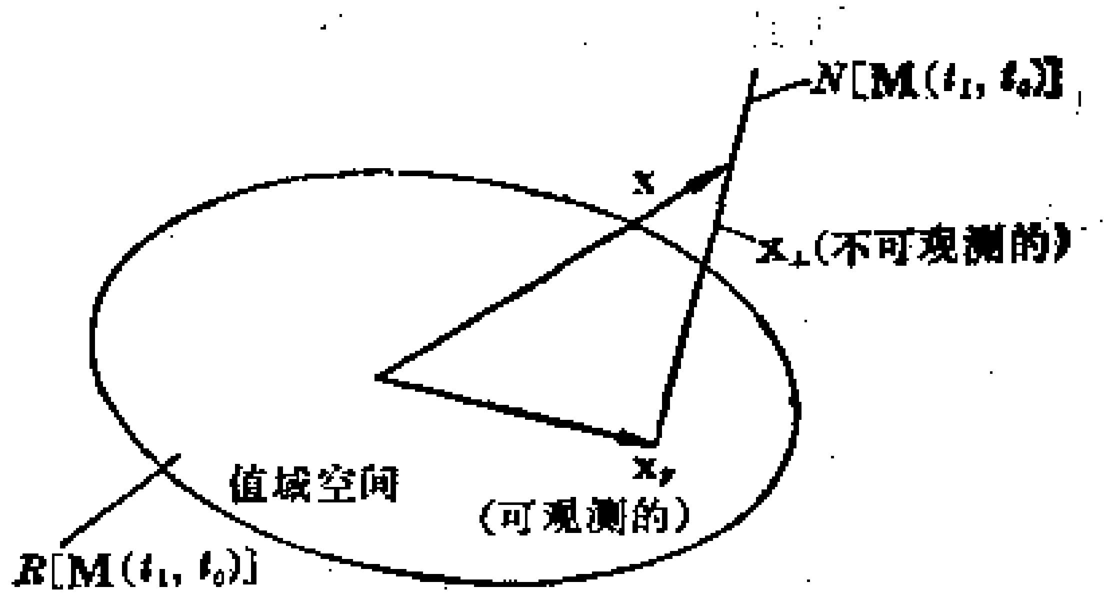


图 9.5-2　状态空间的正交分解

如前所注意到的，状态可控制性与可观测性间的关系可用对偶关系给出．我们正式给出此关系为定理 9.5-7.

定理 9.5-7　系统是完全可观测的(状态可控制的)，当且仅当它的对偶是完全状态可控制的(可观测的).

如前所见，利用对偶系统的定义容易证明此定理．如果系统是实的，对偶方程是

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}^T(t)\mathbf{z} + \mathbf{C}^T(t)\mathbf{v} \tag{26a}$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{B}^T(t)\mathbf{z} + \mathbf{D}^T(t)\mathbf{v} \tag{26b}$$

如同应用于状态可控制性那样，利用条件 (10) 可看出对偶系统 (26a)是完全可控制的，当且仅当 $\mathbf{\Phi}^T(t_1, t_0)\mathbf{C}^T(t)$的各行是线性独立的，或者换言之，$\mathbf{C}(t)\mathbf{\Phi}(t_1, t_0)$的各列是线性独立的，这就是(18)所表示的条件.

定常系统

如在 § 9.4 所见，检查定常系统可控制性的较简单条件是可以得到的．我们给出定理 9.4-3 的一个证明，它是下列定理的一个特殊结果(也可参看习题 9.37).

定理 9.5-8　方程(9.4-1) 的定常线性系统是完全输出可控制的，当且仅当 $m\times pn$ 矩阵

$$\mathbf{Q}=[\mathbf{CB}\quad \mathbf{CAB}\quad \cdots\quad \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B}]$$

有秩 m.

因为系统是定常的，为方便起见取 $t_0=0$. 因为 $\mathbf{A}$ 满足它的特征方程 $\mathbf{P}(\mathbf{A})$, 可写

$$\mathbf{P}(\mathbf{A})=\mathbf{A}^n+a_1\mathbf{A}^{n-1}+a_2\mathbf{A}^{n-2}+\cdots+a_n\mathbf{I}=\mathbf{0} \tag{27}$$

转置(27)式，左乘以 $\mathbf{B}^T$，右乘以 $\exp(\mathbf{A}^Tt)\mathbf{C}^T\boldsymbol{\lambda}$，得

$$\mathbf{B}^T\mathbf{P}^T(\mathbf{A})\exp(\mathbf{A}^Tt)\mathbf{C}^T\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{0} \tag{28}$$

由于

$$\frac{d^k}{dt^k}e^{\mathbf{A}t}=\mathbf{A}^ke^{\mathbf{A}t} \tag{29}$$

利用此关系，(28)可写作

$$\frac{d^n}{dt^n}\mathbf{H}_y^T\boldsymbol{\lambda}+a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\mathbf{H}_y^T\boldsymbol{\lambda}+\cdots=\mathbf{0} \tag{30}$$

现在如果条件(10)成立，即假如在任何区间上 $\mathbf{H}_y^T\boldsymbol{\lambda}\neq\mathbf{0}$，则对于线性齐次微分方程必有非零初始条件. 换言之，对于 $k=0, 1, 2, \cdots, n-1$ 中至少一个必有

$$\frac{d^k}{dt^k}(\mathbf{H}_y^T\boldsymbol{\lambda})_{t=0}=(\mathbf{CA}^k\mathbf{B})^T\boldsymbol{\lambda}\neq 0 \tag{31}$$

于是条件(10)化为要求对于每个 $\boldsymbol{\lambda}\neq 0$，矢量

$$(\mathbf{CA}^k\mathbf{B})^T\boldsymbol{\lambda}\qquad k=0, 1, \cdots, n-1$$

中至少有一个不是零. 对于输出空间 Y 中的一切 $\boldsymbol{\lambda}\neq\mathbf{0}$，这个要求可简明地记为分块矩阵方程

$$\begin{bmatrix}(\mathbf{CB})^T\\(\mathbf{CAB})^T\\ \vdots \\(\mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B})^T\end{bmatrix}\boldsymbol{\lambda}\neq\mathbf{0} \tag{32}$$

(32)表示的条件成立当且仅当矩阵的 m 列是线性独立的，即矩阵有秩 m. (32)中的矩阵显然是定理 9.5-8 中 $\mathbf{Q}$ 的转置. 以 $\mathbf{C}=\mathbf{I}$

代入，由定理 9.5-8 立即得出定理 9.4-3.

9.6. 状态空间的分解

在 §9.4 我们给出相异系统的法式分解. 这种分解的状态方程由方程(9.4-11)给出. 现在不限于相异系统推导状态空间的一般分解[Kalman, 1962]. 时变系统的分解是时间的函数，但与定常系统有相同的结构. 因此我们将限于讨论定常系统. 有兴趣的读者可利用 §9.5 的结果推广这些结果到时变系统 [Kalman, Ho 和 Narendra, 1962].

开始之前，复习一下不变子空间的概念是有好处的，请看下例.

例 9.6-1 Q 的值域 $R(\mathbf{Q})$ 是 A 的不变子空间，这里 Q 是在定理 9.4-3 中定义的. 为了证明，设 x 是 $R(\mathbf{Q})$ 中任一矢量. 则 x 有表达式

$$\mathbf{x}=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i\mathbf{A}^i\mathbf{B} \tag{1}$$

其中 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots$ 是任意常数. 现在

$$\mathbf{Ax}=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i\mathbf{A}^{i+1}\mathbf{B} \tag{2}$$

此和式中最后一项是 $\alpha_{n-1}\mathbf{A}^n\mathbf{B}$，由于凯莱-哈密尔顿定理，可写

$$\alpha_{n-1}\mathbf{A}^n\mathbf{B}=\alpha_{n-1}[-a_1\mathbf{A}^{n-1}-a_2\mathbf{A}^{n-2}-\cdots-a_n\mathbf{I}]\mathbf{B}$$

把此式代入(2)式，得

$$\mathbf{Ax}=\sum_{i=0}^{n-1}\beta_i\mathbf{A}^i\mathbf{B} \tag{3}$$

其中 β_i 是 α_i 与 a_i 的适当的组合. (3)式证明了 $R(\mathbf{Q})$ 是 A 的不变子空间，因为当 x 在 $R(\mathbf{Q})$ 中时，Ax 也在 $R(\mathbf{Q})$ 中.

现在考察当状态空间分解为直和

$$R^n=M\oplus M^\perp \tag{4}$$

时矩阵 A 的结构. 设 M 是在 A 下的不变子空间，具有基矢量 $\mathbf{u}_1$,

$\mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_k$. 如果 $\mathbf{x}$ 属于M, 可写

$$\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{k}\xi_i\mathbf{u}_i \tag{5}$$

且因M在 $\mathbf{A}$ 下是不变的, 有

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mathbf{u}_i \tag{6}$$

由(6)式可得矩阵 $\mathbf{A}$ 在基 $\mathbf{u}$ 中有表达式

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12}\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}\end{bmatrix} \tag{7}$$

矩阵 $\mathbf{A}_{11}$ 是 $k\times k$ 的, 矩阵 $\mathbf{A}_{22}$ 是$(n-k)\times(n-k)$的.

对定常系统, 与定理 9.5-4 对应的可表示为下列定理.

定理 9.6-1 定常系统的可控制状态的集合是 $\mathbf{Q}$ 的值域(参看定理 9.4-3).

以此为基础, 现在按照

$$R^n=R(\mathbf{Q})\oplus R(\mathbf{Q})^{\perp} \tag{8}$$

来分解状态空间, 状态矢量可写为

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2 \tag{9}$$

其中 $\mathbf{x}_1$ 属于 $R(\mathbf{Q})$, $\mathbf{x}_2$ 属于 $R(\mathbf{Q})^{\perp}$. 如果 $\dim R(\mathbf{Q})=k$, 则系统矩阵取(7)的形式. 余下的是建立 $\mathbf{B}$ 的形式. 我们知道 $\mathbf{x}_2$ 不再是可控制的, 因此直观地可有

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{11}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix} \tag{10}$$

为了证明这点, 由定义

$$\dot{\mathbf{x}}_2=\mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2+\mathbf{B}_{21}\mathbf{u}$$

属于 $R(\mathbf{Q})^{\perp}$. 今在 $R(\mathbf{Q})^{\perp}$中取任何 $\mathbf{z}\neq\mathbf{0}$, 于是利用条件(9.5-9)使 $t_1=\xi$, 以 $\mathbf{H}_z$ 代 $\mathbf{H}_y$, 得到

$$(\mathbf{B}_{21}^T\mathbf{z}, \mathbf{u})=(\mathbf{z}, \mathbf{B}_{21}\mathbf{u})=0$$

如(10)所指出的，由此有 $\mathbf{B}_{21}\mathbf{u}=\mathbf{0}$.

利用(7)式得到分解的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}_1=\mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1+\mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2+\mathbf{B}_{11}\mathbf{u} \tag{11a}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2=\mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 \tag{11b}$$

对于可观测性有相似的分解式，其结果可由对偶原理直接得到.

现在分解状态空间为如图 9.6-1 的四个子空间. 利用在 § 9.4

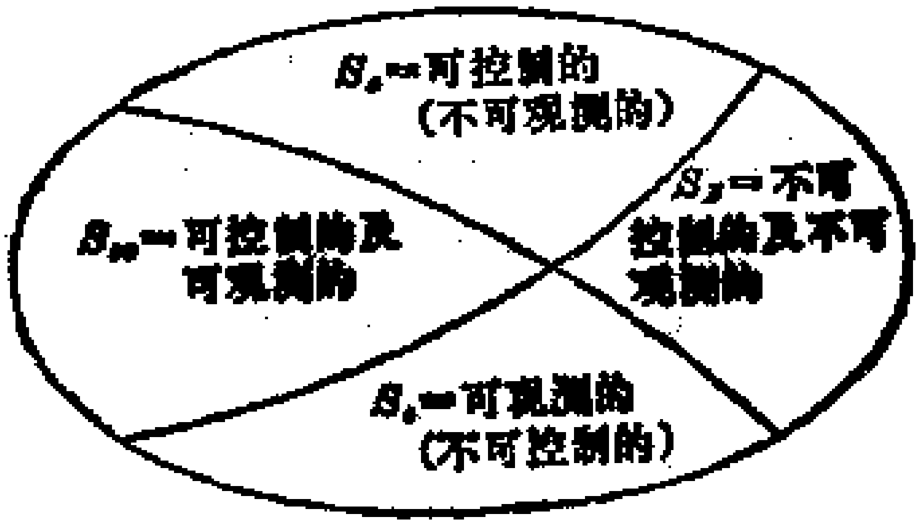


图 9.6-1 状态空间的分解

所建立的记号，子空间 S_c 是可控制而不可观测的状态的子空间，从而此子空间是 $R(\mathbf{Q})$ 与 $R(\mathbf{P})^{\perp}$ 的交，这里 $\mathbf{P}$ 是定理 9.4-4 中的矩阵. 这里引用了一切可观测状态的集合是 $R(\mathbf{P})$ 而一切不可观测状态的集合是 $R(\mathbf{P})^{\perp}$ 这个事实.

我们正式列出子空间为

$$\begin{aligned} S_c &= R(\mathbf{Q})\cap R(\mathbf{P})^{\perp} \\ R(\mathbf{Q}) &= S_c \oplus S_{co} \\ R(\mathbf{P})^{\perp} &= S_c \oplus S_N \\ R^n &= S_c \oplus S_{co} \oplus S_N \oplus S_o \end{aligned} \tag{12}$$

状态矢量 $\mathbf{x}$ 现在可写为

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}_c+\mathbf{x}_{co}+\mathbf{x}_N+\mathbf{x}_o \tag{13}$$

$$
\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_c \\ \dot{\mathbf{x}}_{co} \\ \dot{\mathbf{x}}_N \\ \dot{\mathbf{x}}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} & \mathbf{A}_{14} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{24} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{33} & \mathbf{A}_{34} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_{co} \\ \mathbf{x}_N \\ \mathbf{x}_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} \\ \mathbf{B}_{21} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u} \tag{14a}
$$

$$
\mathbf{y} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{C}_{12} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{C}_{14}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_{co} \\ \mathbf{x}_N \\ \mathbf{x}_o \end{bmatrix} + \mathbf{D}\mathbf{u} \tag{14b}
$$

方程(14)中的零说明如下：B 中后二行为零是由于 $\mathbf{x}_N$ 及 $\mathbf{x}_o$ 是不可控制的；输出矩阵中第一第三分块为零是由于 $\mathbf{x}_c$ 及 $\mathbf{x}_N$ 是不可观测的；四个分块 $\mathbf{A}_{31}$, $\mathbf{A}_{32}$, $\mathbf{A}_{41}$ 及 $\mathbf{A}_{42}$ 为零是由于(7)及 $R(\mathbf{Q}) = S_c \oplus S_{co}$ 在 A 下也是不变的；四个分块 $\mathbf{A}_{21}$, $\mathbf{A}_{41}$, $\mathbf{A}_{23}$ 及 $\mathbf{A}_{43}$ 为零是由于 $R(\mathbf{P})^{\perp} = S_c \oplus S_N$ 在 A 下也是不变的.

对于定常线性系统标准结构的决定有计算方法，这里不去介绍它们，有兴趣的读者可参看卡尔曼[1963].

9.7. 识别问题

我们简略地考察一下识别问题. 实际上这个问题是以前考察过的所有问题的反问题. 在我们的大部分工作中从系统的线性微分方程开始并分析其运动. 在识别问题中我们观察运动且问：系统的动态方程是什么？

让我们比较正式地提出此问题的要点. 考察开始为静止的系统且对输入作用脉冲函数(物理上，尖而窄的脉冲波). 如果 u 是输入矢量，逐次地令 $u_i (i=1, 2, \cdots, p)$ 是单位脉冲函数. 对应于每个输入 u_i，我们测量输出 y_{i1}, y_{i2}, $\cdots$, y_{im}. 输出的矩阵 (y_{ij}) 是脉冲响应矩阵，记为 $\mathbf{S}(t, t_0)$. 由于假定系统在 $t=t_0$ 时是静止的，$\mathbf{S}(t, t_0)$ 满足条件

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t, t_0) &\neq 0 \qquad t > t_0 \\ \mathbf{S}(t, t_0) &= 0 \qquad t < t_0 \end{aligned} \tag{1}$$

现在如果 $\mathbf{u}(t)$ 是任一输入，则输出 $\mathbf{y}$ 由卷积积分

$$\mathbf{y}(t) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{S}(t, \lambda) \mathbf{u}(\lambda) d\lambda \tag{2}$$

给出．今设要检验的系统是方程 (5.7-1) 表示的单输入单输出系统．由(5.7-12)看出脉冲响应矩阵是

$$\mathbf{S}(t, \xi) = \begin{cases} \mathbf{H}_y(t, \xi) = \mathbf{C}(t)\mathbf{\Phi}(t, \xi)\mathbf{B}(\xi) & t > \xi \\ 0 & t < \xi \end{cases} \tag{3}$$

在识别问题中已给 $\mathbf{S}(t, \xi)$，而问题是综合处理系统矩阵 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ 及 $\mathbf{C}$. 的确，在 § 4.7我们给了各种决定单输入单输出系统的微分方程的方法．当系统有 p 个输入 m 个输出时定理 9.7-1 提供了一个综合问题的解法．显然，定理 9.7-1 可应用于 $p = m = 1$ 的情况，因此 § 4.7的实现可由此定理来证实．

这里不去详细地考察一切识别问题．我们只想说明脉冲矩阵在什么时候和如何决定系统的动态方程．如果求得系统矩阵 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$，$\mathbf{C}$，使(3)成立，就说方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{4a}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{4b}$$

是系统的实现．然而可能有系统的某些方面不能由脉冲响应识别．为了详述这一点，我们考察一个相异定常系统，其法式方程由(9.4-4)给出．传递函数矩阵是($\mathbf{D} = 0$)

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \\ &= \mathbf{\Gamma}(s\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{\Omega} \end{aligned} \tag{5}$$

$$= \sum_{i=1}^{n_{co}} \frac{\mathbf{K}_i}{s - \lambda_i} \tag{6}$$

其中 n_{co} 是 S_{co} 的维数(参看图 9.4-3)．为了得到(6) 式，利用 $s\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}$

是对角形的，于是

$$\Gamma(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\Omega=\sum_{i=1}^{n}\frac{\Gamma_i\Omega_i^T}{s-\lambda_i} \tag{7}$$

这里 Γ_i 是 Γ 的第 i 列，Ω_i^T 是 Ω 的第 i 行．现在 Γ_i 对应着每一个不可观测的状态变量，而 Ω_i 对应着每一个不可控制的状态变量，它们都是零．所以在和式(7)中只需取系统的可观测又可控制的部分 S_{co}．

(7)式顺便说明 $\mathbf{K}_i$ 是二重积或外积

$$\mathbf{K}_i=\Gamma_i\Omega_i^T \tag{8}$$

因而有秩1．

(6)式暗含地指出传递函数只包含关于系统的可控制的且可观测的部分的信息．一般的结论是：由测量脉冲响应或传递函数决定或实现系统的微分方程表示法不是经常可能的．这个结论是正确的，根本原因是由于没有关于子系统 S_c，S_o 及 S_N 的信息包含在传递函数中．求得 $\mathbf{H}(s)$ 的实现是可能的．我们将概述由吉柏特[1963]提出的方法．首先在下例中说明前面的结果．

例 9.7-1 考察系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\ -1\end{bmatrix}u$$

$$y=[1\quad 1]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

容易证明此系统是完全可控制的但不是可观测的．传递函数是

$$\mathbf{H}(s)=\mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B}$$

其中

$$\Phi(s)=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$$

由于

$$s\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}s-1 & 1\\ 0 & s-2\end{bmatrix}$$

及

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s-1} & \frac{-1}{(s-1)(s-2)}\\ 0 & \frac{1}{s-2}\end{bmatrix}$$

因此

$$\mathbf{H}(s)=\frac{-2}{s-1}$$

实现 $\mathbf{H}(s)$的方法由下列定理给出.

定理 9.7-1 设 $\mathbf{H}(s)$是有理传递函数矩阵，它的元素 $h_{ij}(s)$没有重极点，设 $\mathbf{H}(s)$有 q 个相异极点 $s=\lambda_i(i=1,2,\cdots,q)$，使得分项函数展开是

$$\mathbf{H}(s)=\sum_{i=1}^{q}\frac{\mathbf{K}_i}{s-\lambda_i}+\mathbf{D} \tag{9}$$

其中

$$\mathbf{K}_i=\lim_{s\to\lambda_i}(s-\lambda_i)\mathbf{H}(s) \tag{10}$$

$$\mathbf{D}=\lim_{s\to\infty}\mathbf{H}(s) \tag{11}$$

设 $\mathbf{K}_i$ 的秩是 r_i，则 $\mathbf{H}(s)$有实现

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{Ax}+\mathbf{Bu} \tag{12a}$$

$$\mathbf{y}=\mathbf{Cx}+\mathbf{Du} \tag{12b}$$

其中 $\mathbf{x}=n$ 维状态矢量

$\mathbf{y}=m$ 维输出矢量

$\mathbf{u}=p$ 维控制矢量

系统的阶数不低于

$$n=\sum_{i=1}^{q}r_i \tag{13}$$

且 $\mathbf{A}$ 的特征值是相异的，当且仅当对一切 i 有 $r_i=1$.

我们不去正式证明此定理. 然而我们将说明如何利用此结果实现一个系统. 首先假设 $\mathbf{K}_i$ 是实 $m\times p$ 矩阵. 然后分解 $\mathbf{K}_i$ 为两

个矩阵[Kalman, 1963], 二者都有秩 r_i 使

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{E}_i \mathbf{F}_i \tag{14}$$

其中 $\mathbf{E}_i$ 是 $m \times r_i$ 矩阵. 如果设 $\mathbf{f}_{ij}$ 是 $\mathbf{F}_i$ 的第 j 行, $\mathbf{e}_{ji}$ 是 $\mathbf{E}_i$ 的第 j 列, 可写(14)式为二重积或外积

$$\mathbf{K}_i = \sum_{j=1}^{r_i} \mathbf{e}_{ji} \mathbf{f}_{ij}^T \tag{15}$$

把(15)式代入(9)式, 得

$$\mathbf{H}(s) = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{r_i} \frac{\mathbf{e}_{ji} \mathbf{f}_{ij}^T}{s - \lambda_i} + \mathbf{D} \tag{16}$$

(16)式实际上是和(6)式相同的, 它们表示法式. 特别, 与(16)中的和式相关联的矩阵是

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{I}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \mathbf{I}_2 & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_q \mathbf{I}_q \end{bmatrix} \tag{17}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_q \end{bmatrix} \qquad \Gamma = [\mathbf{E}_1 \cdots \mathbf{E}_q]$$

其中 $\mathbf{I}_i$ 是 r_i 阶恒等矩阵.

这里我们不去深究这个讨论, 因为这些内容超出本书范围. 有兴趣的读者为要详细讨论可参考吉柏特 [1963] 和卡尔曼[1963]. 我们以下例结束这一节.

例 9.7-2 考察传递函数

$$\mathbf{H}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{2s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{4}{s+1} \\ 0 & \dfrac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

根据(10)可求得剩余矩阵. 有

$$\mathbf{K}_1 = \lim_{s \to -1} (s+1) \mathbf{H}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因为 $\mathbf{K}_1$ 有秩 2，于是 $\lambda_1=-1$ 是二重根．也有

$$\mathbf{K}_2=\lim_{s\to-2}(s+2)\mathbf{H}(s)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

因 $\mathbf{K}_2$ 有秩 1，显然由(13)，系统的阶数是 3.

(14)式要求的分解对 $\mathbf{K}_1$ 是明显的，即 $\mathbf{K}_1=\mathbf{E}_1$，$\mathbf{F}_1=\mathbf{I}$. 对 $\mathbf{K}_2$ 可写出

$$\mathbf{K}_2=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}[1 \quad 0]$$

于是可令

$$\mathbf{E}_2=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} \qquad \mathbf{F}_2=[1 \quad 0]$$

由(17)得到方程的法式.

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{cc|c}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ \hline 0 & 0 & -2\end{array}\right]$$

$$\mathbf{\Omega}=\left[\begin{array}{cc}1 & 0\\ 0 & 1\\ \hline 1 & 0\end{array}\right] \qquad \mathbf{\Gamma}=\left[\begin{array}{cc|c}1 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{array}\right]$$

参考资料

Chang, A.: An Algebraic Characterization of Controllability, *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-10, no. 1. January, 1965.

Gilbert, E. G.: Controllability and Observability in Multivariable Control Systems, *SIAM J. Control*, 1963.

Kalman, R. E.: On the General Theory of Control Systems, *Proc. First Intern. Congr. Automatic Control*, Moscow, 1960, Butterworth & Co. (Publishers), London, 1961.

Kalman, R. E.: Canonical Structure of Linear Dynamical Systems, *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S.*, vol. 48, no. 4, pp. 596—600, 1962.

Kalman, R. E.: Mathematical Description of Linear Dynamic Sys-

tems, *SIAM J. Control*, 1963.

Kalman, R. E and J. E. Bertram: General Synthesis Procedure for Computer Control of Single Loop and Multiloop Linear System (An Optional Sampling System), *AIEE Trans.*, pt. II, vol. 77, pp. 602—609, 1958.

Kalman, R. E, Y. C. Ho, and K. S. Narendra: Controllability of Linear Dynamical Systems, in *Contributions to Differential Equations*, vol. 1, Interscience Publishers, Inc., New York, 1962.

Kreindler, E., and P. E. Sarachik: On the Concepts of Controllability and Observability of Linear Systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-9, pp. 129—137, April, 1964.

Zadeh, L. A., and C. A. Desoer: *Linear Systems Theory*, McGraw-Hill Book Company, New York., 1963.

习题

9.1. 考察图 P9.1 所示的系统. 利用§9.2的方法建立一个控制序列使任何初态被转换到原点. "反馈"增益是什么?

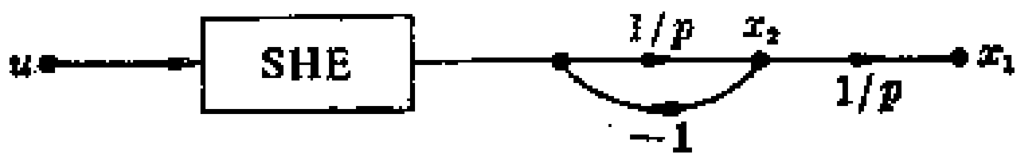


图 P9.1

9.2. 已知一连续系统,其状态方程为

$$\dot{x}_1 = x_2 + u$$

$$\dot{x}_2 = -x_2$$

控制 $u(t)$ 是分段常数, 对 $kT < t \leqslant (k+1)T\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ 定义为 $u(t) = u(kT)$. 初态矢量 $\mathbf{x}(0) = [0 \quad x_2(0)]^T$ 是可控制的吗? 初态矢量 $\mathbf{x}(0) = [x_1(0) \quad 0]^T$ 是可控制的吗? 此系统是完全可控制的吗?

9.3. 在习题 9.2 中求出一切可控制状态的集合. 给出可控制状态的集合与不可控制状态的集合的图形表示[参见图 9.2-5].

9.4. 一个抽样数据系统的转移矩阵已知为

$$\Phi(T) = \text{diag}[e^{\lambda_1 T}, \cdots, e^{\lambda_n T}]$$

如果此系统为完全可控制的, 关于一个单输入系统的 $n \times 1$ 控制分布矩阵 Δ

的元素能说些什么？[参见定理 9.3-1.]

9.5. 考察 $n\times1$ 矢量 $\Phi^{-i+1}\lambda$，$i=1,2,\cdots,n$[参看(9.3-8)式]，且假设只有 $r<n$ 个是线性独立的. 试证起始 r 个矢量是线性独立的.

9.6. 在例 9.3-1 中证明 $\Phi^{-1}\Delta_2$ 及 Δ_2 是线性独立的，且 $\Phi^{-2}\Delta_2$，$\Phi^{-1}\Delta_2$，Δ_2 是线性相关的.

9.7. 在例 9.3-1 中验证矢量 $\Phi^{-2}\Delta_3$，$\Phi^{-1}\Delta_3$ 及 Δ_3 是线性相关的.

9.8. 证明定理 9.3-2. 利用导致定理 9.3-1 的理由. 观察到在(9.3-8)中定义的矢量 g_i 成为矩阵 $\Phi^{-i+1}\Delta$，其中 Δ 是 $n\times p$ 的. 试证若定理 9.3-2中的矩阵的秩是 n，则系统是可控制的. 现设系统是可控制的，试证其秩必为 n.

9.9. 验证(9.3-16)中的矩阵有秩为 2.

9.10. 下列各抽样数据系统是可观测的吗？

$$\Phi=e^{\lambda T}\begin{bmatrix}1 & T & \frac{T^2}{2!}\\ 0 & 1 & T\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

a. $\mathbf{C}=[1\quad 0\quad 0]$

b. $\mathbf{C}=[1\quad 1\quad 0]$

c. $\mathbf{C}=[0\quad 1\quad 0]$

d. $\mathbf{C}=[0\quad 0\quad 1]$

e. $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

f. $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

9.11. 利用检验对偶系统的可控制性来检验习题 9.10 中各系统的可观测性.

9.12. 设系统

$$\dot{x}_1=\lambda_1x_1+x_2$$
$$\dot{x}_2=\lambda_2x_2$$

的输出 $y=x_1+x_2$ 是在离散时间测量的. 确定由 y 的测定值 y_1，y_2，…求 $x_1(0)$ 及 $x_2(0)$ 的方程组. 求用测得数据表达 $x_1(t)$ 及 $x_2(t)$ 的式子.

9.13. 试证矩阵

$$\theta(T)=\int_0^T e^{Ft}dt$$

是非奇的. 设 T 使 $T^{-1}FT=J$ 且考察 e^{Jt}. 现在参照(9.4-25)及(9.3-10)到(9.3-12), 试证

$$|\theta(T)|=\prod_{i=1}^{s}\rho_i^{r_i}$$

其中

$$\rho_i=\begin{cases}\dfrac{-1+e^{\lambda_i T}}{\lambda_i} & \lambda_i\neq 0\\ T & \lambda_i=0\end{cases}$$

9.14. 试证习题 9.13 中的 $\theta(T)$ 与 e^{FT} 是交换的; 亦即证明

$$\theta(T)e^{FT}=e^{FT}\theta(T)$$

9.15. 利用习题 9.13 与 9.14 的结果证明定理 9.3-2 中的矩阵有秩 n, 当且仅当矩阵

$$[\mathbf{B}\quad \Phi^{-1}\mathbf{B}\quad \cdots\quad \Phi^{-n+1}\mathbf{B}]$$

有秩 n [参看(9.3-3)及(9.3-4)].

9.16. 利用习题 9.15 的结果验证例 9.3-1 对于那里所用的 B 的三种选取所得的结论.

9.17. 利用定义 9.4-1, 检验习题 9.2 中连续系统的可控制性.

9.18. 证明定理 9.4-2.

9.19. 画出相异系统法式表达式的流图. 用此流图解释定义 9.4-1 及 9.4-2.

9.20. 利用定理 9.4-3 及 9.4-5 检验习题 9.2 中的系统的可控制性.

9.21. 试证其矩阵由 (4.7-25) 式给出的线性系统是完全可观测的和完全可控制的.

9.22. 利用习题 9.21 得出 n 阶标量线性微分系统

$$a_n\frac{d^n y}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y^{n-1}+\cdots+a_0 y=b_m\frac{d^m u}{dt^m}+\cdots+b_0 u$$

是完全可控制的结论. 若 y 是输出, 得出系统是完全可观测的结论.

9.23. 设 A 是 n 阶的且 B 是 $n\times p$ 的, 考察增广系统矩阵 [参看(4.8-14)]

$$\mathbf{F}=\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{array}\right]$$

若 $\mathbf{P}(\mathbf{A})$ 是 $\mathbf{A}$ 的特征多项式，试证 $\mathbf{F}$ 的零化多项式是 $\mathbf{F}\mathbf{P}(\mathbf{F})$.

9.24. 考察一个有单输入单输出的 n 阶定常系统. 试证当 $\mathbf{A}$ 的最小多项式的次数 k 满足 $k\leqslant n-1$ 时系统是不可控制的和不可观测的. (提示：利用定理 9.4-3 及最小多项式的定义. 证明矢量 $\mathbf{g}, \mathbf{A}\mathbf{g}, \cdots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{g}$ 对任何矢量 $\mathbf{g}$ 只有 k 个是线性独立的.)

9.25. 检查下列系统的可观测性.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & -6 & 0\\ 6 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}=[1 \quad 0 \quad 0]$$

$$\mathbf{C}=[0 \quad 1 \quad 0]$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

9.26. 若习题 9.25 中的系统是抽样的，在什么条件下它们是不可观测的?

9.27. 利用习题 9.23 及定理 9.4-4 的结果证明增广系统 [参看 (4.8-14)式]

$$\dot{\mathbf{z}}=\mathbf{F}\mathbf{z}$$

$$\mathbf{y}=\mathbf{M}\mathbf{z}$$

其中 $\mathbf{M}=[\mathbf{C} \quad \mathbf{0}]$, 是可观测的，当且仅当 $(n+p)\times(n+p)m$ 矩阵

$$[\mathbf{M}^T \quad \mathbf{F}^T\mathbf{M}^T \quad \cdots \quad (\mathbf{F}^n)^T\mathbf{M}^T]$$

有秩 $n+p$.

9.28. 利用习题 9.27 的结果检验系统

$$\mathbf{F}=\left[\begin{array}{cc|cc}0 & -\theta & 1 & 0\\ \theta & 0 & 0 & 1\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$$\mathbf{M}=\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

的可观测性.

9.29. 若习题 9.28 的系统是可观测的，在什么抽样条件下它是不可观测的?

9.30. 试证 $\mathbf{W}_x$ 满足矩阵微分方程[参看(9.5-4)式]

$$\frac{dW_x(t_0, t_1)}{dt_1}=BB^T+AW_x+W_xA^T \quad W_x(t_0, t_0)=0$$

9.31. 试证 M 满足矩阵微分方程[参看(9.5-20)式]

$$\frac{dM(t_0, t_1)}{dt_1}=-[C^TC+A^TM+MA]$$

9.32. 利用习题 9.31 及定理 9.5-6 的结果说出关于可观测性的另一定理.

9.33. 求传递函数矩阵

$$H(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{-1}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

的一个实现.

9.34. 在(9.5-10)式中以 H_x 代替 H_y, 考察可控制性的必要和充分条件. 证明条件

$$H_x^T(t_1, t)\lambda\neq 0 \qquad t_0\leqslant t\leqslant t_1$$

等价于条件

$$H_x^T(t_0, t)y\neq 0 \qquad t_0<t \text{ 对 } y\neq 0$$

[提示: 利用恒等式 $\Phi(t_1, t_0)\Phi(t_0, t)=\Phi(t_1, t)$.]

9.35. 考察方程(9.5-1)给出的时变系统. 假设 $A(t)$ 和 $B(t)$ 分别是 $n-2$ 及 $n-1$ 次连续可微的. 设

$$Q=[B_1 \quad B_2 \quad \cdots \quad B_n]$$

其中

$$B_i=-AB_{i-1}+\dot{B}_{i-1} \qquad i=2, 3, \cdots, n$$

且 $B_1=B$. 试证方程(9.5-1)中的系统在时刻 t_0 是完全状态可控制的充分条件是对于某个 $t>t_0$, Q 的秩为 n. (张[1965]也证明了若 A 与 B 的元素是解析函数, 这个条件是必要的.)进行如下: 设对某个 $t>t_0$, Q 有秩 n, 但此系统不是完全状态可控制的, 于是造成矛盾. 若系统不是完全可控制的, 则按习题 9.34 的条件, 存在 $\lambda\neq 0$ 使得

$$H_x^T(t_0, t)\lambda=0 \qquad t>t_0$$

或

$$B^T(t)\Phi^T(t_0, t)\lambda=0$$

微分上式得

$$[\dot{\mathbf{B}}^T\mathbf{\Phi}^T(t_0, t)+\mathbf{B}^T\frac{d}{dt}\mathbf{\Phi}^T(t_0, t)]\lambda=0$$

现在

$$\frac{d\mathbf{\Phi}(t_0, t)}{dt}=-\mathbf{\Phi}(t_0, t)\mathbf{A}$$

因此有

$$(\dot{\mathbf{B}}-\mathbf{A}\mathbf{B})^T\mathbf{\Phi}^T(t_0, t)\lambda=\mathbf{B}_2^T\mathbf{y}=0$$

其中 $\mathbf{y}=\mathbf{\Phi}^T(t_0, t)\lambda$. 再求 $\mathbf{B}_2^T\mathbf{y}$ 的微分，得出

$$\mathbf{B}_i\mathbf{y}=0 \qquad 对\ i=1, 2, \cdots, n$$

现在得出结论：因为对一切 $t>t_0$ 有 $\mathbf{y}\neq 0$, 条件 $\mathbf{B}_i\mathbf{y}=0$ 与 $\mathbf{Q}$ 有秩 n 的假设是矛盾的.

9.36. 利用对偶原理及习题 9.35 的结果建立一个决定时变系统可观测性的定理.

9.37. 利用习题 9.35 的结果建立一个决定定常线性系统状态可控制性的定理. 与定理 9.4-3 比较之.

9.38. 利用习题 9.35(或习题 9.36) 的结果研究习题 9.28 中系统的可观测性，设 $\theta=\theta(t)$ 是 t 的可微函数.

附录III　z 变换简表

在(8.6-2)式中定义 z 变换为①

$$\mathscr{Z}[f(t)] \triangleq F(z) \triangleq \sum_{i=0}^{\infty} f(iT) z^{-i} = \mathscr{L}[f^*(t)]_{z=e^{sT}}$$

其中

$$f^* = \sum_{i=0}^{\infty} f(iT)\delta(t-iT)$$

且 T 是抽样周期.

$f(t)$	$\mathscr{Z}[f(t)]$
$\delta(t-nT)$(单位脉冲函数)	z^{-n}
$1(t)$(单位阶跃函数)	$\dfrac{z}{z-1}$
t	$\dfrac{Tz}{(z-1)^2}$
t^2	$\dfrac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
e^{-at}	$\dfrac{z}{z-e^{-aT}}$
$\sin\omega t$	$\dfrac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
$\cos\omega t$	$\dfrac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$

① J. R. Ragazzini and G. F. Franklin, *Sampled-data Control Systems*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1958.

附录Ⅳ 罗兹-霍尔维茨稳定性准则

考察对应于微分系统 $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}$ 的特征方程

$$|s\mathbf{I}-\mathbf{A}|=b_n s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_1 s+b_0=0 \tag{1}$$

如果 $\mathbf{A}$ 的特征值有负实部，即 $\mathrm{Re}\lambda_i<0$，则系统是渐近稳定的. 罗兹-霍尔维茨 (Routh-Hurwitz) 稳定性准则①提供了一个利用方程(1)的多项式的系数的判定法. 对于渐近稳定性下列条件必须成立:

(i) 一切 $b_i>0$ 或一切 $b_i<0$.

(ii) 下表中第一列的一切项必须同号.

n	b_n	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	$\cdots$
$n-1$	b_{n-1}	b_{n-3}	b_{n-5}	b_{n-7}	$\cdots$
$n-2$	c_1	c_2	c_3	$\cdots$	
$n-3$	d_1	d_2	$\cdots$		
$\vdots$	$\vdots$				
1	j_1				
0	k_1				

其中

$$c_1=\frac{b_{n-1}b_{n-2}-b_n b_{n-3}}{b_{n-1}}$$

$$c_2=\frac{b_{n-1}b_{n-4}-b_n b_{n-5}}{b_{n-1}}$$

$$c_3=\frac{b_{n-1}b_{n-6}-b_n b_{n-7}}{b_{n-1}}$$

....

① J. J. D'Azzo and C. H. Houpis, *Feedback Control System Analysis and Synthesis*, 2d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.

且

$$d_1=\frac{c_1b_{n-3}-b_{n-1}c_2}{c_1}$$

$$d_2=\frac{c_1b_{n-5}-b_{n-1}c_3}{c_1}$$

$$d_3=\frac{c_1b_{n-7}-b_{n-1}c_4}{c_1}$$

························

这个格式可继续到一切项都计算出来．要注意 1 和 0 行各只含一项．再者，此准则表明具有正实部的特征值的个数等于第一列中符号改变的次数．

作为例子，考察多项式

$$s^3+a_2s^2+a_1s+a_0=0$$

$\mathrm{Re}\lambda_i<0$ 的条件是

(i) $a_2>0, a_1>0, a_0>0$，因为 $a_3=1$．

(ii) 从表

3	1	a_1	0
2	a_2	a_0	0
1	$\frac{a_2a_1-a_0}{a_2}$	0	
0	a_0		

看出，除条件(i)外

$$\frac{a_2a_1-a_0}{a_2}>0$$

所以我们看出罗兹-霍尔维茨准则可以提供一个关于渐近稳定性的简易判定法．

索　　引

二　画

三　画

四　画

五　画

六　画

七 画

八 画

九　画

十 画

十 一 画

十 二 画

十 三 画

十　四　画

十　五　画

十　六　画